https://doi.org/10.15350/17270529.2022.4.39

УДК 519.6

Анализ пульсационных характеристик потоков вязкого газа в расширяющихся конических соплах

С. А. Карсканов

Удмуртский федеральный исследовательский центр УрО РАН, Россия, 426067, Ижевск, ул. Т. Барамзиной, 34

Аннотация. Показаны результаты теоретического решения задачи дозвукового протекания вязкого газа сквозь расширяющиеся конические сопла на основе прямого численного моделирования путем интегрирования уравнений Навье-Стокса. Интегрирование уравнений Навье-Стокса осуществляется с помощью алгоритмов высокого порядка аппроксимации на многопроцессорной вычислительной системе. Приводятся поля распределения пульсационных характеристик (компонент вектора скорости) в соплах. Выявляются зависимости распределения пульсаций от угла расширения. Показано, что максимальные значения пульсаций продольной компоненты скорости сосредоточены в ядре потока, а радиальные пульсации распространяются от точки отрыва потока в области резкого расширения сопла. На основе дискретного преобразования Фурье строятся спектры частот, на которых происходит колебание компонент тензора напряжений Лайтхилла отвечающих за сдвиговый и собственный шум. Показано, что в точке на оси распределения частот не зависят от угла конусности, в то время как амплитуды колебаний в точке близкой к зоне расширения растут вместе с ростом угла конусности.

Ключевые слова: прямое численное моделирование, расширяющееся коническое сопло, вязкий поток, высокий порядок аппроксимации, дискретное преобразование Фурье.

✉ *Сергей Карсканов, e-mail: ser@udman.ru*

Analysis of Viscous Gas Flows Pulsation Characteristics in Expanding Conical Nozzles

Sergey A. Karskanov

Udmurt Federal Research Center UB RAS (34, T. Baramzina St., Izhevsk, 426067, Russian Federation)

Summary. A numerical experiment was carried out based on direct numerical simulation. The problem of the viscous gas flow through expanding conical nozzles was solved by integrating the Navier-Stokes equations without involving additional models and empirical constants. The integration of the Navier-Stokes equations was carried out using high-order approximation algorithms on a multiprocessor cluster. The distribution fields of the fluctuations of the velocity components are given. Longitudinal and radial pulsations have the same range of change. The maximum of the longitudinal fluctuations is located in the flow core, while the maximum values of the fluctuations of the radial velocity component are located in the vicinity of the line emanating from the separation point. The acoustic parameters of the studied flows are considered. The Lighthill stress tensor was used to describe acoustic interactions in a pulsating medium. Two components of the tensor were considered and compared. The tensor component, which describes the stresses in the flow caused by the interaction of turbulent fluctuations, is responsible for the intrinsic noise. The tensor that describes the shear-turbulence interaction is responsible for the shear noise. Graphs of the change in the components of the Lighthill tensor in time for various nozzles are plotted. In all cases, it can be seen that the amplitudes of the values of the tensor components are comparable in absolute value, i.e. they are within the same order. With an increase in the expansion angle, the amplitude of the fluctuations in the values of the components increases too. On the basis of the discrete Fourier transform, the frequency spectra are plotted, at which the components of the Lighthill tensor oscillate in nozzles with different constriction angles. It is shown that at a point on the axis the frequency distribution does not depend on the taper angle. The oscillation amplitudes at a point close to the expansion zone grow with an increase in the taper angle.

Keywords: direct numerical simulation, expanding conical nozzle, viscous flow, high order approximation, discrete Fourier transform.

✉ *Sergey Karskanov, e-mail: ser@udman.ru*

ВВЕДЕНИЕ

Среди многочисленных подходов к моделированию газодинамических течений особое место занимает прямое численное моделирование (Direct Numerical Simulation, DNS). Метод DNS наиболее сложен в реализации, требует огромных вычислительных затрат и времени, однако, именно этим способом можно получить максимум информации о течении. При моделировании потоков таким методом в каждый момент времени (полагаемого непрерывным) рассчитывается полный спектр значений гидродинамических параметров. В итоге можно анализировать как мгновенные, так и осредненные характеристики. Кроме того, можно оценивать пульсационные характеристики и анализировать временные ряды. Это особенно важно и актуально для задач аэроакустики, так как оказывается, что скоростной возмущенный поток воздействует не только на тело, с которым он непосредственно взаимодействует, но и на удаленный объект по средствам акустических колебаний. Очевидно одно, что для получения точного спектра акустических колебаний, решение нестационарной газодинамической задачи должно быть максимально полным, корректным и адекватным.

В данной работе на основе метода DNS рассчитывается течение в расширяющихся конических соплах. Цель работы – на примере анализа пульсационных характеристик течений в расширяющихся соплах показать возможности прямого численного моделирования и выявить закономерности распределения параметров потоков.

МАТЕМАТИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ

Полные (трехмерные) расчеты DNS для потока с числом Рейнольдса порядка 10^6 недостижимы (по крайней мере, прямо сейчас) из-за недоступности приемлемой сетки и времени выполнения счета. Поэтому достаточно логичным является осесимметричное DNS для потока с высоким числом Рейнольдса, свойственным реальным сверхзвуковым течениям.

На основе осесимметричной модели уравнений Навье-Стокса рассчитывалось течение в расширяющемся сопле, расположенном между двумя резервуарами.

Обезразмеренные уравнения Навье-Стокса в осесимметричной постановке в цилиндрической системе координат имеют вид:

$$\frac{\partial \mathbf{W}}{\partial t}+\frac{\partial \mathbf{A}}{\partial x}+\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial r}+\frac{\mathbf{D}}{r}=0\,. \tag{1}$$

Здесь

$$\mathbf{W}=\left(\rho,\rho u_x,\rho u_r,\rho E\right)^{\mathrm{T}}, \tag{2}$$

$$\mathbf{A}=\begin{pmatrix} \rho u_x \\ \rho u_x^2+\dfrac{p}{k\mathrm{M}^2}-\Pi_{xx} \\ \rho u_x u_r-\Pi_{rx} \\ u_x\left(\rho E+\dfrac{p}{k\mathrm{M}^2}\right)+q_x-u_x\Pi_{xx}-u_r\Pi_{rx} \end{pmatrix}, \tag{3}$$

$$\mathbf{B}=\begin{pmatrix} \rho u_r \\ \rho u_x u_r-\Pi_{xr} \\ \rho u_r^2+\dfrac{p}{k\mathrm{M}^2}-\Pi_{rr} \\ u_r\left(\rho E+\dfrac{p}{k\mathrm{M}^2}\right)+q_r-u_x\Pi_{xr}-u_r\Pi_{rr} \end{pmatrix}, \tag{4}$$

$$\mathbf{D}=\begin{pmatrix} \rho u_r \\ \rho u_x u_r-\Pi_{xr} \\ \rho u_r^2-\Pi_{rr}+\Pi_{\theta\theta} \\ u_r\left(\rho E+\dfrac{p}{k\mathrm{M}^2}\right)+q_r-u_x\Pi_{xr}-u_r\Pi_{rr} \end{pmatrix}, \tag{5}$$

$$E=\frac{u_x^2+u_r^2}{2}+\frac{1}{k(k-1)\mathrm{M}^2}\frac{p}{\rho}, \tag{6}$$

$$\Pi_{xx}=\frac{1}{\mathrm{Re}}\bar{\mu}\left(2\frac{\partial u_x}{\partial x}-\frac{2}{3}\operatorname{div}\mathbf{u}\right), \tag{7}$$

$$\Pi_{rx}=\Pi_{xr}=\frac{1}{\mathrm{Re}}\bar{\mu}\left(\frac{\partial u_r}{\partial x}+\frac{\partial u_x}{\partial r}\right), \tag{8}$$

$$\Pi_{rr}=\frac{1}{\mathrm{Re}}\bar{\mu}\left(2\frac{\partial u_r}{\partial r}-\frac{2}{3}\operatorname{div}\mathbf{u}\right), \tag{9}$$

$$\Pi_{\theta\theta}=\frac{1}{\mathrm{Re}}\bar{\mu}\left(2\frac{u_r}{r}-\frac{2}{3}\operatorname{div}\mathbf{u}\right), \tag{10}$$

$$q_x=-\frac{1}{(k-1)\mathrm{Re}\,\mathrm{Pr}\,\mathrm{M}^2}\bar{\lambda}\frac{\partial T}{\partial x}, \tag{11}$$

$$q_r=-\frac{1}{(k-1)\mathrm{Re}\,\mathrm{Pr}\,\mathrm{M}^2}\bar{\lambda}\frac{\partial T}{\partial r}, \tag{12}$$

$$\operatorname{div}\mathbf{u}=\frac{\partial u_x}{\partial x}+\frac{\partial u_r}{\partial r}+\frac{u_r}{r}. \tag{13}$$

Здесь x, r, t – безразмерные цилиндрические координаты и безразмерное время, ρ – безразмерная плотность, p – безразмерное давление, u_x и u_r – безразмерные компоненты вектора скорости, E – безразмерная удельная энергия, T – безразмерная температура.

Также в уравнения входят безразмерные комплексы (числа) Рейнольдса, Маха и Прандтля:

$$\mathrm{Re}=\rho_0 u_0 h/\mu, \quad \mathrm{M}=u_0\sqrt{\frac{\rho_0}{kp_0}}, \quad \mathrm{Pr}=\frac{k}{k-1}R\frac{\mu}{\lambda}.$$

Для демонстрации процедуры обезразмеривания выполним ее для двух компонент вектора **A**. Итак,

$$\partial A_1/\partial x=\frac{\rho_0 u_0}{h}\frac{\partial \rho u_x}{\partial x}.$$

В свою очередь,

$$\partial W_1/\partial t = \rho_0 \frac{u_0}{h}\frac{\partial \rho}{\partial t}.$$

Сокращая на комплекс $\rho_0 u_0 / h$, получим неизменный вид уравнения неразрывности:

$$\partial\rho/\partial t = \partial\rho u_x/\partial x + \ldots .$$

Для второй компоненты вектора **A** имеем:

$$\partial A_2/\partial x = \frac{\rho_0 u_0^2}{h}\frac{\partial}{\partial x}\left(\rho u_x^2 + \frac{p_0}{\rho_0 u_0^2}\frac{k}{k}p - \frac{\mu}{\rho_0 u_0 h}\left(2\frac{\partial u_x}{\partial x} - \tfrac{2}{3}\mathrm{div}\mathbf{u}\right)\right) = \frac{\rho_0 u_0^2}{h}\frac{\partial}{\partial x}\left(\rho u_x^2 + \frac{p}{kM^2} - \Pi_{xx}\right).$$

Тогда как,

$$\partial W_2/\partial t = \rho_0 u_0 \frac{u_0}{h}\frac{\partial \rho u_x}{\partial t} = \frac{\rho_0 u_0^2}{h}\frac{\partial \rho u_x}{\partial t}.$$

Сокращая на $\rho_0 u_0^2 / h$, получим уравнение импульса:

$$\partial\rho u_x/\partial t = \partial\left(\rho u_x^2 + \frac{p}{k\mathrm{M}^2} - \Pi_{xx}\right)\Big/\partial x + \ldots .$$

Аналогично можно выполнить обезразмеривание всех компонент уравнений Навье-Стокса.

Стоит отметить, что возможны и другие варианты обезразмеривания. Более подробно о варианте, используемом в данной работе, изложено в [1].

Коэффициенты вязкости и теплопроводности принимаются постоянными, соответствующими рассматриваемой движущейся среде. Газ (воздух) считается однокомпонентным, поэтому $\bar{\mu}$ и $\bar{\lambda}$ можно считать тождественно равными единице.

Следует отметить, что в отличие от декартовой плоской формулировки, осесимметричная постановка позволяет разрешать азимутальное напряжение (уравнение 10).

Вычислительная область (рис. 1) покрывалась мощной прямоугольной пространственной сеткой. Мощность сетки составляла 8 млн. узлов.

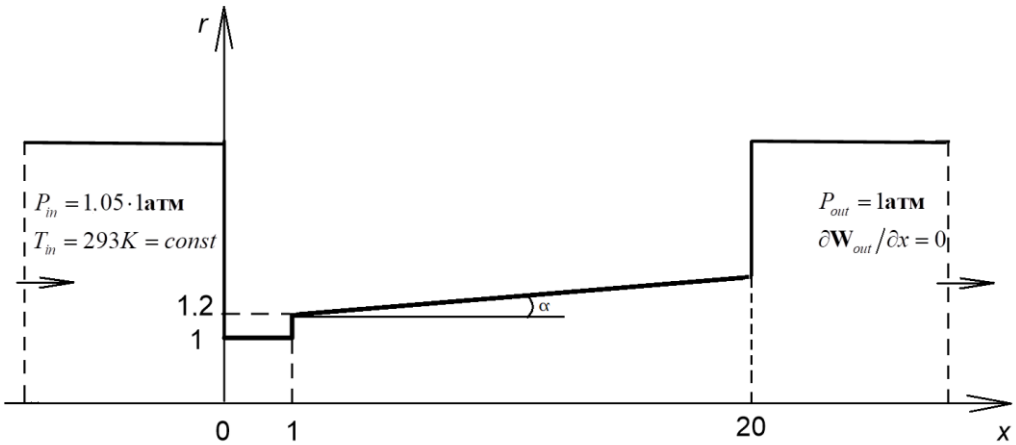

Рис. 1. Расчетная область

Fig. 1. Computational domain

На левой границе задавалось повышенное давление $P_{in} = 1.05 \cdot P_{out}$ и температура, равная 293 К. На правой границе постоянным задавалось давление окружающей среды, остальные параметры определялись сносом.

Угол расширения α изменялся от 0 до 3. Характерное число Рейнольдса, посчитанное по скорости звука, равнялось $\mathrm{Re}_c = 2.06 \cdot 10^6$.

Счет велся на суперкомпьютере "Уран" (ИММ УрО РАН, г. Екатеринбург).

Для расчета частных производных по пространству использовалась схема WENO (Weighted Essentially Non-Oscillatory), основанная на адаптивных шаблонах и автоматическом анализе гладкости [2]. По времени интегрирование осуществлялось с помощью TDV (Total Variation Diminishing) схемы Рунге-Кутта [3]. Таким образом, если решение в рассматриваемой области гладкое, то оно рассчитывалось с высоким порядком на широком шаблоне. При наличии высоких градиентов шаблон сужался вплоть до двух точек.

РЕЗУЛЬТАТЫ И ИХ ОБСУЖДЕНИЕ

Была проведена серия расчетов, моделирующих протекание газа сквозь расширяющиеся конические сопла между двумя камерами. Угол конусности увеличивался.

Проведем анализ распределения осредненных полей пульсаций компонент вектора скорости. Пульсации компонент скорости определяются по формулам:

$$u'_x = u_x - \overline{u_x}, \tag{14}$$

$$u'_r = u_r - \overline{u_r}, \tag{15}$$

$\overline{u_x}$ и $\overline{u_r}$ – усредненные значения компонент вектора скорости.

На рисунках 2 и 3 приведены поля распределения пульсаций. Видно, что продольные и радиальные пульсации имеют одинаковый диапазон изменения. Максимум продольных пульсаций находится в ядре потока, в то время как максимальные значения пульсаций радиальной компоненты скорости расположены в окрестности $r = 1$.

Несмотря на расширение сопла, основные колебания происходят в ядре потока. Особенно это относится к продольным пульсациям. С ростом α увеличивается лишь зона с низкими по модулю пертурбациями скорости. Высокие значения радиальных пульсаций находятся ближе к стенке сопла и, в отличие от продольных пульсаций, имеют тенденцию к более широкому распространению по всему объему сопла.

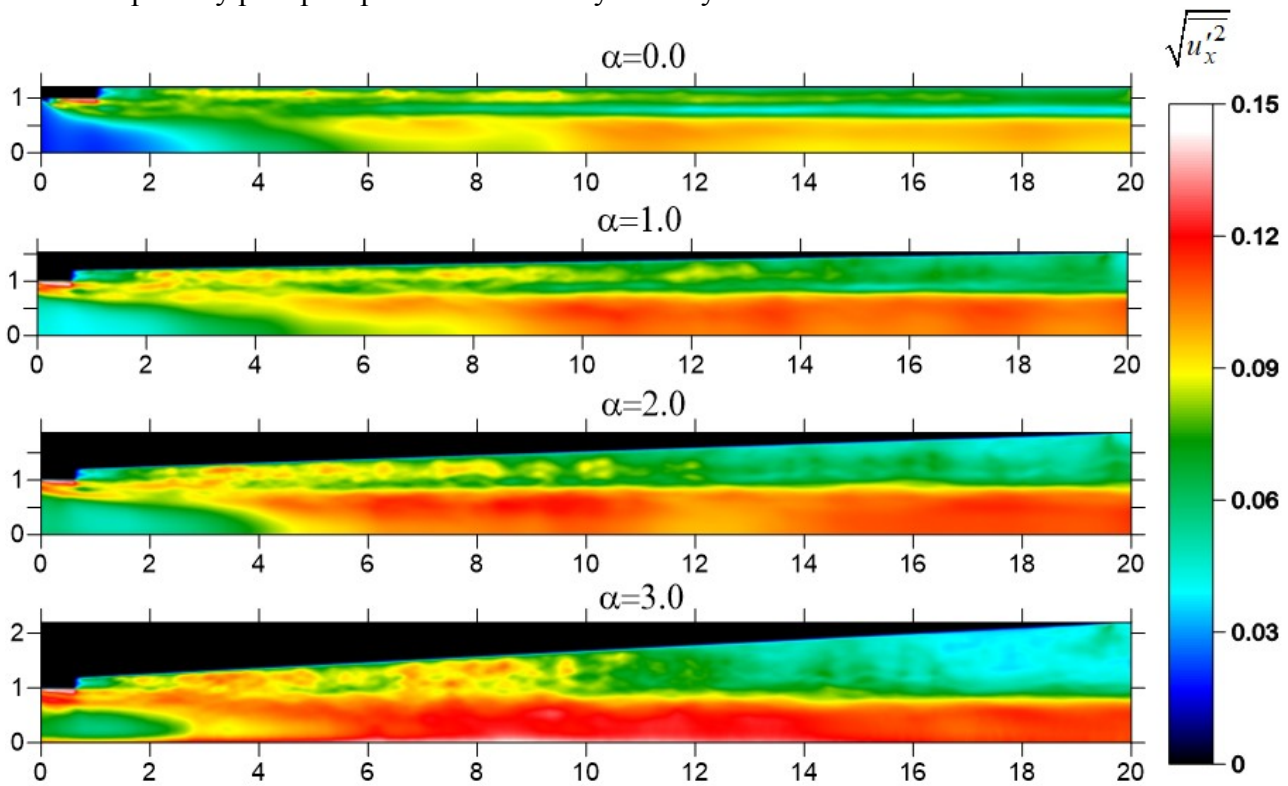

Рис. 2. Распределение пульсаций продольной компоненты скорости

Fig. 2 Distribution of the longitudinal velocity component pulsations

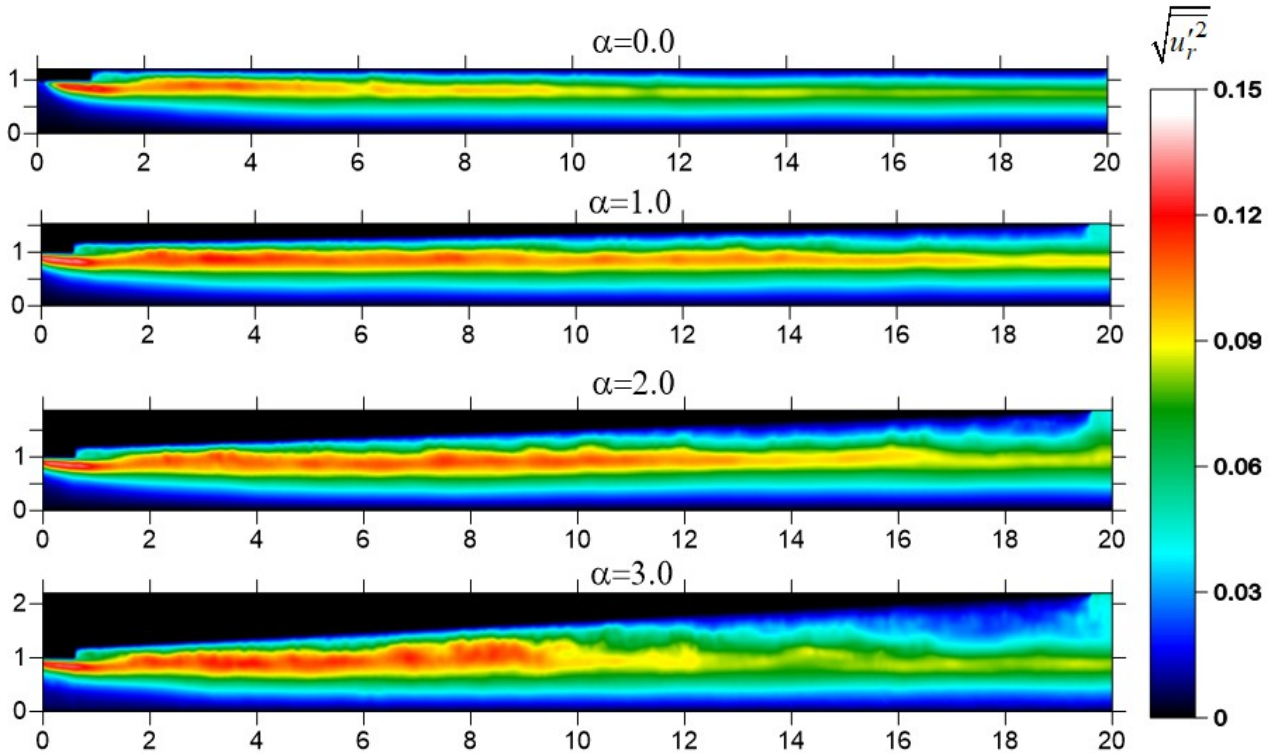

Рис. 3. Распределение пульсаций радиальной компоненты скорости

Fig. 3. Distribution of the radial velocity component pulsations

Далее рассмотрим некоторые акустические параметры исследуемых течений. Очевидно, что шум и звуковое давление, создаваемые высокоскоростными потоками, являются их важными характеристиками.

Для описания акустических взаимодействий в турбулентной среде часто используют тензор напряжений Лайтхилла. В общем виде тензор напряжений Лайтхилла представляется в виде разложения на несколько компонент. Итак, разложение тензора имеет вид [4]:

$$\mathrm{T}_{ij} = \mathrm{T}_{ij}^{m} + \mathrm{T}_{ij}^{l} + \mathrm{T}_{ij}^{n} + \mathrm{T}_{ij}^{s}, \tag{16}$$

здесь T_{ij}^{m} – средняя компонента, определяемая как

$$\mathrm{T}_{ij}^{m} = \rho u_i u_j + (p - c_0^2 \rho)\delta_{ij}. \tag{17}$$

T_{ij}^{l} – компонента линейная относительно флуктуаций скорости, определяемая как

$$\mathrm{T}_{ij}^{l} = \rho u_i u_j' + \rho u_i' u_j. \tag{18}$$

T_{ij}^{n} – компонента квадратичная относительно флуктуаций скорости, определяемая как

$$\mathrm{T}_{ij}^{n} = \rho u_i' u_j'. \tag{19}$$

T_{ij}^{s} – энтропийная компонента, определяемая как

$$\mathrm{T}_{ij}^{s} = (p' - c_0^2 \rho')\delta_{ij}. \tag{20}$$

Будем рассматривать и сравнивать два тензора. Тензор T_{ij}^{n}, описывающий напряжения в среде, обусловленные взаимодействием турбулентных пульсаций между собой (взаимодействие "турбулентность – турбулентность"). Шум, создаваемый взаимодействием "турбулентность – турбулентность", получил название "собственного шума". И тензор T_{ij}^{l}, который описывает взаимодействие "сдвиг – турбулентность". Шум, обусловленный взаимодействием "сдвиг – турбулентность" является "сдвиговым шумом".

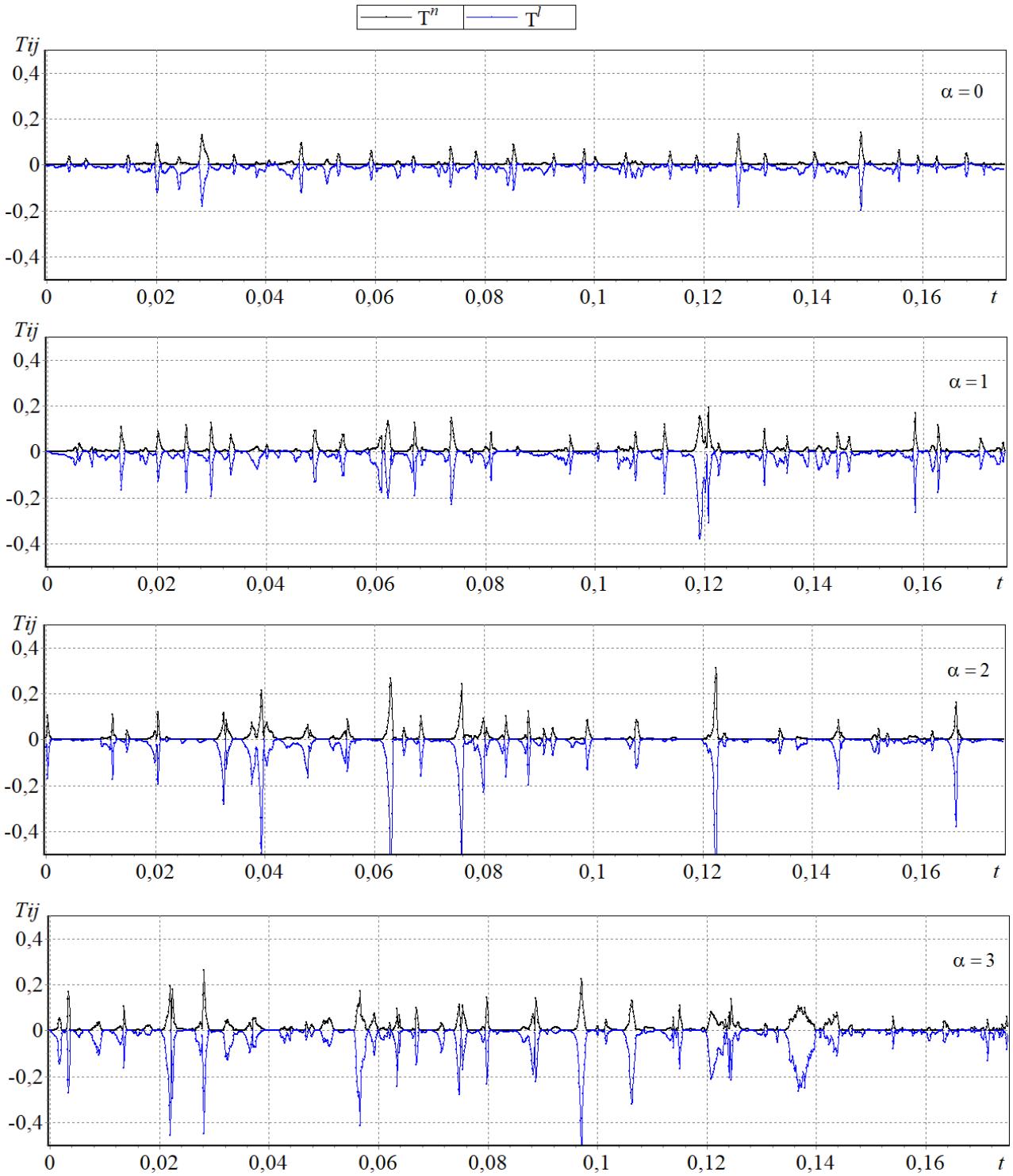

Рис. 4. Изменение компонент тензора T^n и T^l во времени

Fig. 4. Distribution of tensor components T^n and T^l in time

На рис. 4 показаны графики изменения компонент T^n и T^l тензора Лайтхилла T во времени в точке $(15;1.0)$ для различных сопел. Во всех случаях видно, что величины T^n и T^l соизмеримы по абсолютной величине, то есть находятся в пределах одного порядка. С увеличением угла расширения амплитуда колебаний значений компонент увеличивается (с 0.13 до 0.3 для T^n и с 0.2 до 0.5 для T^l).

Далее, на основе временных рядов изменения компонент тензора Лайтхилла выполним преобразование Фурье для получения спектров. Выражения для дискретного преобразования Фурье (ДПФ) (прямого и обратного) имеют вид:

$$ST(k)=\sum_{n=0}^{N-1} st(n)\exp\left(-j\frac{2\pi}{N}nk\right),\ k=0...N-1, \tag{21}$$

$$st(n)=\frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1} ST(k)\exp\left(j\frac{2\pi}{N}nk\right),\ n=0...N-1. \tag{22}$$

На рис. 5 показаны спектры частот колебаний компонент тензора Лайтхилла T^n и T^l в точке $(15;1.0)$ в соплах с разным углом расширения. Данная точка располагается в последней трети сопла в зоне взаимодействия ядра потока с расширяющейся частью. Из данных рисунка четко видно возрастание амплитуды колебаний с увеличением угла конусности. Компонента T^l в принципе имеет большие значения, нежели T^n. Кроме того, изменения максимумов T^n с ростом угла α незначительное, в то время как амплитуда T^l постоянно растет. В цилиндрическом сопле ($\alpha=0$) пики частот сосредоточены выше 100 Гц. С ростом угла расширения частота максимальных колебаний смещается в сторону меньших значений (около 200 Гц).

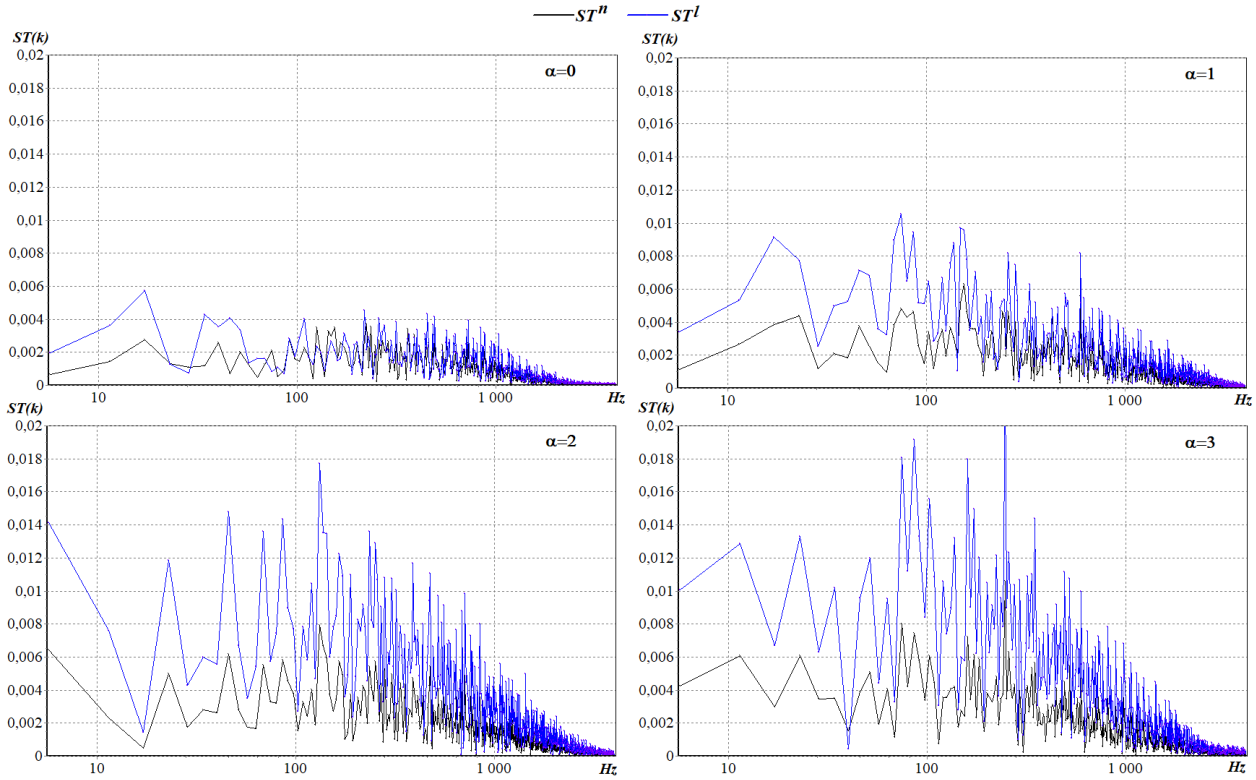

Рис. 5. Спектры частот колебаний компонент тензора T^n и T^l в точке (15; 1)

Fig. 5. Oscillation frequency spectra of the tensor components T^n и T^l at a point (15; 1)

На рис. 6 показаны спектры колебаний компонент тензора в точке $(10;0.0)$. Это центральная точка сопла, расположенная на оси и посередине относительно длины. Сразу стоит отметить, что с ростом угла конусности возрастания амплитуд не происходит. В отличие от распределений спектров частот в точке $(15;1.0)$, значения T^n и T^l начинают сближаться, а не расходиться. Тем не менее, ST^l везде больше, чем ST^n. В целом, уровень

максимальных значений ST^l и ST^n в центральной точке аналогичен уровню для точки $(15;1.0)$. Также аналогичны и частоты распределения пиковых значений, находящиеся примерно на уровне 200 Гц, кроме случая $\alpha = 0$: в случае с центральной точкой распределения параметров не выбивается из общей тенденции.

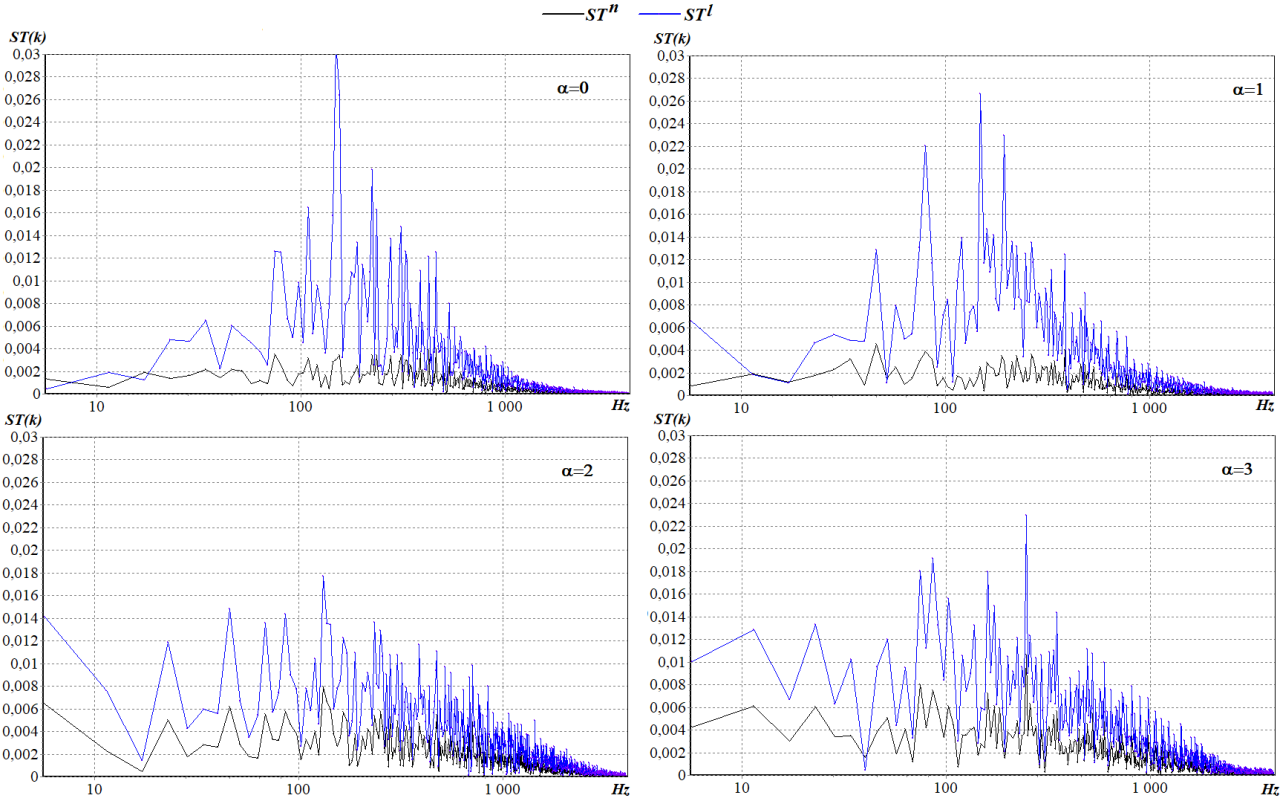

Рис. 6. Спектры частот колебаний компонент тензора T^n и T^l в точке (10; 0)

Fig. 6. Oscillation frequency spectra of the tensor components T^n и T^l at a point (10; 0)

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В работе рассмотрены потоки в расширяющихся конических соплах, расположенных между двумя резервуарами. На основе изменения параметров во времени построены поля распределения пульсаций компонент скорости. Диапазон изменения пульсаций компонент скорости совпадает, однако, зоны максимальных значений сильно разнятся. Максимальные значения пульсаций продольной компоненты сосредоточены в ядре потока, которое сохраняет свою форму, несмотря на расширение. Максимальные значения радиальных пульсаций зарождаются в зоне отрыва и разносятся продольным потоком вдоль линии $x = 1$.

Построенные на основе дискретного преобразования Фурье спектры частот колебаний компонент тензора Лайтхилла свидетельствуют о различии в распределении в точках $(15;1.0)$ и $(10;0.0)$. Значения ST^l и ST^n в точке $(15;1.0)$ формируются под действием расширения (колебания усиливаются с ростом угла конусности). В центральной точке $(10;0.0)$ значения ST^l и ST^n формируются ядром потока и слабо зависят от увеличения α.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Липанов А. М., Кисаров Ю. Ф., Ключников И. Г. Численный эксперимент в классической гидромеханике турбулентных потоков. Екатеринбург: УрО РАН, 2001. 162 с.

2. Shu C. W. High Order ENO and WENO Schemes for Computational Fluid Dynamics // In: Barth T.J., Deconinck H. (eds) High-Order Methods for Computational Physics. Lecture Notes in Computational Science and Engineering, vol. 9. Springer, Berlin, Heidelberg, 1999, pp. 439-582. https://doi.org/10.1007/978-3-662-03882-6_5

3. Gottlieb S., Shu C. W. Total Variation Diminishing Runge-Kutta Schemes // Mathematics of Computation, 1998, vol. 67, pp. 73-85. https://doi.org/10.1090/S0025-5718-98-00913-2

4. Волков К. Н., Емельянов В. Н., Цветков А. И. и др. Акустические взаимодействия в газовых потоках. М.: Физматлит, 2021. 588 с

REFERENCES

1. Lipanov A. M., Kisarov Yu. F., Klyuchnikov I. G. *Chislennyy eksperiment v klassicheskoy gidromekhanike turbulentnykh potokov* [Numerical experiment in classical hydromechanics of turbulent flows]. Ekaterinburg: UrO RAN Publ., 2001. 162 p.

2. Shu C. W. High Order ENO and WENO Schemes for Computational Fluid Dynamics. In: Barth T.J., Deconinck H. (eds) *High-Order Methods for Computational Physics. Lecture Notes in Computational Science and Engineering*, vol. 9. Springer, Berlin, Heidelberg, 1999, pp. 439-582. https://doi.org/10.1007/978-3-662-03882-6_5

3. Gottlieb S., Shu C. W. Total Variation Diminishing Runge-Kutta Schemes. *Mathematics of Computation*, 1998, vol. 67, pp. 73-85. https://doi.org/10.1090/S0025-5718-98-00913-2

4. Volkov K. N., Emel'yanov V. N., Tsvetkov A. I. i dr. *Akusticheskie vzaimodeystviya v gazovykh potokakh* [Acoustic interactions in gas flows]. Moscow: Fizmatlit Publ., 2021. 588 p.

Поступила 03.10.2022; после доработки 28.10.2022; принята к опубликованию 14.11.2022
Received October 3, 2022; received in revised form October 28, 2022; accepted November 14, 2022

Информация об авторе

***Карсканов Сергей Андреевич**, кандидат физико-математических наук, старший научный сотрудник, УдмФИЦ УрО РАН, Ижевск, Российская Федерация, e-mail: ser@udman.ru*

Information about the author

***Sergey A. Karskanov**, Cand. Sci. (Phys.-Math.), Senior Researcher, Udmurt Federal Research Center UB RAS, Izhevsk, Russian Federation, e-mail: ser@udman.ru*