https://doi.org/10.15350/17270529.2022.1.7

УДК 532.51

Новый класс точных решений уравнений Навье-Стокса с учетом внутреннего тепловыделения

Л. С. Горулева, Е. Ю. Просвиряков

Институт машиноведения УрО РАН, Россия, 620049, Екатеринбург, ул. Комсомольская, д. 34

Аннотация. Представлены новые точные решения трехмерных уравнений Навье-Стокса, которые учитывает диссипацию энергии в уравнении переноса тепла в движущейся жидкости. Течения вязкой несжимаемой жидкости могут быть как установившимися, так и неустановившимися. Для построения точных решений за основу взят класс точных решений Линя-Сидорова-Аристова. Характерная особенность представления поля скоростей заключается в том, что оно описывается линейными формами относительно двух координат (горизонтальных или продольных). Коэффициенты линейных форм зависят от третьей координаты (вертикальной или поперечной) и от времени. Давление и температура жидкости являются квадратичными формами с аналогичной структурой для скорости. Данное семейство точных решений описывает течения вязкой несжимаемой жидкости с пространственным ускорением. Иными словами, учитываются нелинейные эффекты сил инерции, которые выражаются через конвективную производную вектора скорости и температуры в уравнениях Навье-Стокса и уравнении теплопроводности соответственно. Принимая во внимание рассеяние энергии в жидкости, конкурируют два квадратично нелинейных эффекта. Это обстоятельство существенно затрудняет исследование течений, поэтому в статье приводятся формулы, описывающие ползущее течение (приближение Стокса) и движение Озеена. Таким образом, показана возможность построения точных решений уравнений движения с диссипацией механической энергии в тепловую энергию для полных уравнений Навье-Стокса, а также для их линеаризованных аналогов в приближении Стокса и Озеена.

Ключевые слова: точное решение, уравнение Навье-Стокса, уравнение несжимаемости, уравнение переноса тепла, диссипативная функция Рэлея.

✉ *Евгений Просвиряков, e-mail: evgen_pros@mail.ru*

A New Class of Exact Solutions to the Navier-Stokes Equations with Allowance Made for Internal Heat Release

Larisa S. Goruleva, Evgenii Yu. Prosviryakov

Institute of Engineering Science UB RAS (34, Komsomolskaya St., Ekaterinburg, 620049, Russian Federation)

Summary. New exact solutions to the three-dimensional Navier-Stokes equations, where the heat transfer equation takes into account energy dissipation in a moving fluid, are discussed. The flows of viscous incompressible fluids can be in both steady- and unsteady-state. The construction of the exact solutions is based on the Lin-Sidorov-Aristov class of exact solutions. The characteristic feature of the velocity field representation is that it is described by linear forms with respect to two coordinates (horizontal or longitudinal). The coefficients of the linear forms depend on the third coordinate (vertical, or transverse) and time. The fluid pressure and temperature are quadratic forms with a similar structure for the velocity. This family of exact solutions describes the flows of viscous incompressible fluids with a spatial acceleration. In other words, nonlinear effects of inertia forces are taken into account, which are expressed through the convective derivative of the velocity and temperature vectors in the Navier–Stokes equations and the heat conduction equation, respectively. Since there is energy dissipation in fluids, two quadratically nonlinear effects compete. This significantly complicates the study of flows; therefore, the paper presents formulas describing a creeping flow (the Stokes approximation) and Oseen motion. Thus, the study shows the possibility of constructing exact solutions to the motion equations with mechanical energy dissipation into thermal energy for the full Navier–Stokes equations and for their linearized analogs in the Stokes and Oseen approximations.

Keywords: exact solution, Navier-Stokes equation, incompressibility equation, heat transfer equation, Rayleigh dissipative function.

✉ *Evgenii Prosviryakov, e-mail: evgen_pros@mail.ru*

ВВЕДЕНИЕ

При нахождении точных решений уравнений Навье-Стокса, описывающих течения несжимаемых жидкостей, как правило, игнорируется перенос тепла за счет диссипативных процессов [1 – 4]. В этом случае из-за отсутствия гравитационной и капиллярной конвекции без учета функции Рэлея предполагается постоянство температуры, что означает автоматическое выполнение уравнения теплопроводности. Иными словами, рассматривается только тривиальное решение уравнения переноса тепла.

Пренебрежение диссипацией кинетической энергией в тепловую энергию обосновывается несколькими причинами [5]. Укажем два фактора, которые наиболее часто используются в исследовании систем уравнений, моделирующих движение жидких сред.

С физической точки зрения при рассмотрении переноса тепла в уравнении теплопроводности содержится функция Рэлея. Коэффициент, стоящий перед суммой квадратов касательных напряжений, принимает значения для ньютоновский жидкостей в диапазоне $\left[10^{-8};10^{-4}\right]$, поэтому во многих случаях формально полагают его равным нулю для упрощения уравнений движения [5, 6].

Игнорирования влияния диссипативной функции Рэлея с математической точки зрения обусловлено усложнением исследования качественных и количественных свойств решений уравнений Навье-Стокса [7, 8]. Свойства системы уравнений движения существенно усложются из-за квадратичной нелинейности функции Рэлея. Таким образом, при аналитическом и численном моделировании начинают конкурировать конвективная производная уравнений Навье-Стокса и джоулевая диссипация в уравнении переноса тепла [7 – 10].

Для задач теории управления течениями ньютоновской вязкой несжимаемой жидкости целесообразно принимать во внимание диссипативную функцию Рэлея [9, 10]. Несмотря на близость уравнений движения жидкости с учетом локального тепловыделения к уравнениям естественной конвекции (уравнения Обербека-Буссинеска), к настоящему времени отсутствуют алгоритмы нахождения точных решений. Очевидно, что необходимо попытаться использовать известные семейства точных решений уравнений Навье-Стокса без введения в описание явлений переноса диссипативной функции.

Наиболее часто используемым классом точных решений для уравнений Навье-Стокса и близких к ним уравнений гидродинамического типа является класс Линя-Сидорова-Аристова [11 – 13]. Данное семейство точных решений описывает стратифицированные течения жидкости по горизонтальным координатам или по вертикальной переменной для скорости, давления, температуры, концентрации и других силовых факторов. Поле скоростей Линя-Сидорова-Аристова многократно исследовалось и обобщалось. Обзоры по данному классу точных решений уравнений гидродинамики содержатся в [1, 2]. Модификации данного семейства для изобарических, градиентных, конвективных и термодиффузионных течений отражены в статьях [14 – 23]. Основное наблюдение, которое сосредоточено в данных научных работах заключается в том, что линейным формам поля скоростей удовлетворяет квадратичная по части координат функция, описывающая перенос вещества, которая согласуется с полем давления. Квадратичная зависимость температуры позволяет положительно ответить на вопрос о существовании точных решений уравнений Навье-Стокса с учетом рассеяния механической (кинетической) энергии вязкой несжимаемой жидкости.

Целью данной статьи является распространение класса точных решений Линя-Сидорова-Аристова для течений жидкости с локальным выделением тепла. Показать существование таких решений и определить структуру уравнения для нахождения функций, определяющих структуру гидродинамических полей скорости, давления и температуры. В статье отмечается возможность линеаризации уравнений движения, которое осуществляется из-за аппроксимации конвективной производной в уравнении переноса импульса жидкости (в уравнении Навье-Стокса) или в уравнении переноса тепла (в уравнении теплопроводности).

УРАВНЕНИЯ ДВИЖЕНИЯ

Рассмотрим неустановившееся течение вязкой несжимаемой жидкости с учетом внутреннего (локального) тепловыделения, обусловленного внутренним трением слоев по закону Ньютона (ньютоновская жидкость), которое описывается системой уравнений [5, 6]:

$$\frac{\partial \mathbf{V}}{\partial t}+\left(\mathbf{V}\cdot\nabla\right)\mathbf{V}=-\nabla P+\nu\Delta\mathbf{V},$$
$$\frac{\partial T}{\partial t}+\left(\mathbf{V}\cdot\nabla\right)T=\chi\Delta T+Q,$$
$$\nabla\cdot\mathbf{V}=0. \qquad (1)$$

В системе уравнений в (1), состоящей из уравнения Навье-Стокса, уравнения Фурье и уравнения непрерывности, введены следующие обозначения: $\mathbf{V}\left(t,x,y,z\right)=\left(V_1,V_2,V_3\right)$ – вектор скорости; P – давление, деленное на постоянную плотность ρ; ν – кинематическая вязкость; χ – коэффициент температуропроводности; ∇ – оператор Гамильтона, Δ – оператор Лапласа.

Далее будем полагать, что трехмерное движение жидкости описывается в прямоугольной декартовой системе координат. Таким образом, оператор Гамильтона записывается как

$$\nabla=\mathbf{i}_1\frac{\partial}{\partial x}+\mathbf{i}_2\frac{\partial}{\partial y}+\mathbf{i}_3\frac{\partial}{\partial z},$$

где $\mathbf{i}_1$, $\mathbf{i}_2$, $\mathbf{i}_3$ – орты декартовой прямоугольной системы координат, а оператор Лапласа имеет следующий вид:

$$\Delta=\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\frac{\partial^2}{\partial y^2}+\frac{\partial^2}{\partial z^2}.$$

В уравнении теплопроводности функция Q определяет диссипацию энергии жидкости (трансформацию механической энергии в тепловую) согласно формуле:

$$Q=\frac{\nu}{2c_p}\sum_{i=1}^{3}\sum_{j=1}^{3}\left(\frac{\partial V_i}{\partial x_j}+\frac{\partial V_j}{\partial x_i}\right)^2,$$

где c_p – удельная теплоемкость жидкости при постоянном давлении [5]. Преобразовав и просуммировав выражения в скобках для функции Рэлея Q, получим ее представление в следующем виде:

$$Q=\frac{\nu}{c_p}\left[2\left(\frac{\partial V_1}{\partial x_1}\right)^2+2\left(\frac{\partial V_2}{\partial x_2}\right)^2+2\left(\frac{\partial V_3}{\partial x_3}\right)^2+\left(\frac{\partial V_1}{\partial x_2}\right)^2+\left(\frac{\partial V_2}{\partial x_1}\right)^2+\left(\frac{\partial V_1}{\partial x_3}\right)^2+\right.$$
$$\left.+\left(\frac{\partial V_3}{\partial x_1}\right)^2+\left(\frac{\partial V_2}{\partial x_3}\right)^2+\left(\frac{\partial V_3}{\partial x_2}\right)^2++2\left(\frac{\partial V_1}{\partial x_2}\right)\left(\frac{\partial V_2}{\partial x_1}\right)+2\left(\frac{\partial V_1}{\partial x_3}\right)\left(\frac{\partial V_3}{\partial x_1}\right)+2\left(\frac{\partial V_2}{\partial x_3}\right)\left(\frac{\partial V_3}{\partial x_2}\right)\right]. \qquad (2)$$

В скалярном виде уравнения (1) с учетом диссипативной функции (2) записываются следующим образом:

$$\frac{\partial V_1}{\partial t}+V_1\frac{\partial V_1}{\partial x_1}+V_2\frac{\partial V_1}{\partial x_2}+V_3\frac{\partial V_1}{\partial x_3}=-\frac{\partial P}{\partial x_1}+\nu\left(\frac{\partial^2 V_1}{\partial x_1^2}+\frac{\partial^2 V_1}{\partial x_2^2}+\frac{\partial^2 V_1}{\partial x_3^2}\right),$$

$$\frac{\partial V_2}{\partial t}+V_1\frac{\partial V_2}{\partial x_1}+V_2\frac{\partial V_2}{\partial x_2}+V_3\frac{\partial V_2}{\partial x_3}=-\frac{\partial P}{\partial x_2}+\nu\left(\frac{\partial^2 V_2}{\partial x_1^2}+\frac{\partial^2 V_2}{\partial x_2^2}+\frac{\partial^2 V_2}{\partial x_3^2}\right),$$

$$\frac{\partial V_3}{\partial t}+V_1\frac{\partial V_3}{\partial x_1}+V_2\frac{\partial V_3}{\partial x_2}+V_3\frac{\partial V_3}{\partial x_3}=-\frac{\partial P}{\partial x_3}+\nu\left(\frac{\partial^2 V_3}{\partial x_1^2}+\frac{\partial^2 V_3}{\partial x_2^2}+\frac{\partial^2 V_3}{\partial x_3^2}\right),$$

$$\frac{\partial T}{\partial t}+V_1\frac{\partial T}{\partial x_1}+V_2\frac{\partial T}{\partial x_2}+V_3\frac{\partial T}{\partial x_3}=\chi\left(\frac{\partial^2 T}{\partial x_1^2}+\frac{\partial^2 T}{\partial x_2^2}+\frac{\partial^2 T}{\partial x_3^2}\right)+$$

$$+\frac{\nu}{c_p}\left[2\left(\frac{\partial V_1}{\partial x_1}\right)^2+2\left(\frac{\partial V_2}{\partial x_2}\right)^2+2\left(\frac{\partial V_3}{\partial x_3}\right)^2+\right.$$

$$\left(\frac{\partial V_1}{\partial x_2}\right)^2+\left(\frac{\partial V_2}{\partial x_1}\right)^2+\left(\frac{\partial V_1}{\partial x_3}\right)^2+\left(\frac{\partial V_3}{\partial x_1}\right)^2+\left(\frac{\partial V_2}{\partial x_3}\right)^2+\left(\frac{\partial V_3}{\partial x_2}\right)^2+$$

$$\left.2\left(\frac{\partial V_1}{\partial x_2}\right)\left(\frac{\partial V_2}{\partial x_1}\right)+2\left(\frac{\partial V_1}{\partial x_3}\right)\left(\frac{\partial V_3}{\partial x_1}\right)+2\left(\frac{\partial V_2}{\partial x_3}\right)\left(\frac{\partial V_3}{\partial x_2}\right)\right],$$

$$\frac{\partial V_1}{\partial x_1}+\frac{\partial V_2}{\partial x_2}+\frac{\partial V_3}{\partial x_3}=0. \qquad (3)$$

Для системы уравнений (3) далее будет найдено точное решение в классе скоростей, линейных относительно части координат, которое находит свое применение для решения задач гидродинамики [11 – 13, 1 – 4].

КЛАСС ТОЧНЫХ РЕШЕНИЙ

Построим точное решение нелинейной системы уравнений в частных производных (3), используя семейство точных решений Линя-Сидорова-Аристова [11 – 13]. Поле скоростей представим следующим образом:

$$V_1=U(x_3,t)+U_1(x_3,t)x_1+U_2(x_3,t)x_2,$$
$$V_2=W(x_3,t)+W_1(x_3,t)x_1+W_2(x_3,t)x_2,$$
$$V_3=w(x_3,t). \qquad (4)$$

Выражения (4) являются линейными формами относительно горизонтальных (продольных) координат x_1 и x_2 с коэффициентами U, U_1, U_2, W, W_1, W_2 и w, зависящими от вертикальной (поперечной) координаты x_3 и времени t. Поля давления и температуры описываются квадратичными формами:

$$P=P_0(x_3,t)+P_1(x_3,t)x_1+P_2(x_3,t)x_2+P_{11}(x_3,t)\frac{x_1^2}{2}+P_{12}(x_3,t)x_1x_2+P_{22}(x_3,t)\frac{x_2^2}{2},$$

$$T=T_0(x_3,t)+T_1(x_3,t)x_1+T_2(x_3,t)x_2+T_{11}(x_3,t)\frac{x_1^2}{2}+T_{12}(x_3,t)x_1x_2+T_{22}(x_3,t)\frac{x_2^2}{2}. \qquad (5)$$

Для анализа и изучения свойств течений жидкости необходимо вычислить коэффициенты форм (4) и (5). Вычислим частные производные функций по пространственным координатам и времени, описывающих поле скоростей (4) и поля давления и температуры (5):

$$\frac{\partial V_1}{\partial t}=\frac{\partial U}{\partial t}+\frac{\partial U_1}{\partial t}x_1+\frac{\partial U_2}{\partial t}x_2;$$

$$\frac{\partial V_1}{\partial x_1}=U_1;\ \frac{\partial V_1}{\partial x_2}=U_2;$$

$$\frac{\partial V_1}{\partial x_3} = \frac{\partial U}{\partial x_3} + \frac{\partial U_1}{\partial x_3} x_1 + \frac{\partial U_2}{\partial x_3} x_2 ;$$

$$\frac{\partial P}{\partial x_1} = P_1 + P_{11} x_1 + P_{12} x_2 ;$$

$$\frac{\partial P}{\partial x_2} = P_2 + P_{12} x_1 + P_{22} x_2 ;$$

$$\frac{\partial P}{\partial x_3} = \frac{\partial P_0}{\partial x_3} + \frac{\partial P_1}{\partial x_3} x_1 + \frac{\partial P_2}{\partial x_3} x_2 + \frac{\partial P_{11}}{\partial x_3} \frac{x_1^2}{2} + \frac{\partial P_{12}}{\partial x_3} x_1 x_2 + \frac{\partial P_{22}}{\partial x_3} \frac{x_2^2}{2} ;$$

$$\frac{\partial^2 V_1}{\partial x_1^2} = 0; \ \frac{\partial^2 V_1}{\partial x_2^2} = 0;$$

$$\frac{\partial^2 V_1}{\partial x_3^2} = \frac{\partial^2 U}{\partial x_3^2} + \frac{\partial^2 U_1}{\partial x_3^2} x_1 + \frac{\partial^2 U_2}{\partial x_3^2} x_2 ;$$

$$\frac{\partial V_2}{\partial t} = \frac{\partial W}{\partial t} + \frac{\partial W_1}{\partial t} x_1 + \frac{\partial W_2}{\partial t} x_2 ;$$

$$\frac{\partial V_2}{\partial x_1} = W_1 ; \ \frac{\partial V_2}{\partial x_2} = W_2 ;$$

$$\frac{\partial V_2}{\partial x_3} = \frac{\partial W}{\partial x_3} + \frac{\partial W_1}{\partial x_3} x_1 + \frac{\partial W_2}{\partial x_3} x_2 ;$$

$$\frac{\partial^2 V_2}{\partial x_1^2} = 0; \ \frac{\partial^2 V_2}{\partial x_2^2} = 0;$$

$$\frac{\partial^2 V_2}{\partial x_3^2} = \frac{\partial^2 W}{\partial x_3^2} + \frac{\partial^2 W_1}{\partial x_3^2} x_1 + \frac{\partial^2 W_2}{\partial x_3^2} x_2 ;$$

$$\frac{\partial V_3}{\partial t} = \frac{\partial w}{\partial t} ; \ \frac{\partial V_3}{\partial x_3} = \frac{\partial w}{\partial x_3} ;$$

$$\frac{\partial V_3}{\partial x_1} = 0 ; \ \frac{\partial V_3}{\partial x_2} = 0 ;$$

$$\frac{\partial^2 V_3}{\partial x_1^2} = 0; \ \frac{\partial^2 V_3}{\partial x_2^2} = 0;$$

$$\frac{\partial^2 V_3}{\partial x_3^2} = \frac{\partial^2 w}{\partial x_3^2} ;$$

$$\frac{\partial T}{\partial t} = \frac{\partial T_0}{\partial t} + \frac{\partial T_1}{\partial t} x_1 + \frac{\partial T_2}{\partial t} x_2 + \frac{\partial T_{11}}{\partial t} \frac{x_1^2}{2} + \frac{\partial T_{12}}{\partial t} x_1 x_2 + \frac{\partial T_{22}}{\partial t} \frac{x_2^2}{2} ;$$

$$\frac{\partial T}{\partial x_1} = T_1 + T_{11} x_1 + T_{12} x_2 ;$$

$$\frac{\partial T}{\partial x_2} = T_2 + T_{12} x_1 + T_{22} x_2 ;$$

$$\frac{\partial T}{\partial x_3} = \frac{\partial T_0}{\partial x_3} + \frac{\partial T_1}{\partial x_3} x_1 + \frac{\partial T_2}{\partial x_3} x_2 + \frac{\partial T_{11}}{\partial x_3} \frac{x_1^2}{2} + \frac{\partial T_{12}}{\partial x_3} x_1 x_2 + \frac{\partial T_{22}}{\partial x_3} \frac{x_2^2}{2} ;$$

$$\frac{\partial^2 T}{\partial x_1^2} = T_{11} ; \ \frac{\partial^2 T}{\partial x_2^2} = T_{22} ;$$

$$\frac{\partial^2 T}{\partial x_3^2} = \frac{\partial^2 T_0}{\partial x_3^2} + \frac{\partial^2 T_1}{\partial x_3^2} x_1 + \frac{\partial^2 T_2}{\partial x_3^2} x_2 + \frac{\partial^2 T_{11}}{\partial x_3^2} \frac{x_1^2}{2} + \frac{\partial^2 T_{12}}{\partial x_3^2} x_1 x_2 + \frac{\partial^2 T_{22}}{\partial x_3^2} \frac{x_2^2}{2} .$$

Подставим полученные выражения в систему уравнений (3), получим следующие уравнения движения вязкой несжимаемой жидкости с учетом локального тепловыделения, влияющего на перенос импульса:

$$\frac{\partial U}{\partial t}+\frac{\partial U_1}{\partial t}x_1+\frac{\partial U_2}{\partial t}x_2+\left(U+U_1x_1+U_2x_2\right)U_1+\left(W+W_1x_1+W_2x_2\right)U_2+$$
$$+w\left(\frac{\partial U}{\partial x_3}+\frac{\partial U_1}{\partial x_3}x_1+\frac{\partial U_2}{\partial x_3}x_2\right)=-\left(P_1+P_{11}x_1+P_{12}x_2\right)+\nu\left(\frac{\partial^2 U}{\partial x_3^2}+\frac{\partial^2 U_1}{\partial x_3^2}x_1+\frac{\partial^2 U_2}{\partial x_3^2}x_2\right),$$
$$\frac{\partial W}{\partial t}+\frac{\partial W_1}{\partial t}x_1+\frac{\partial W_2}{\partial t}x_2+\left(U+U_1x_2+U_2x_2\right)W_1+\left(W+W_1x_1+W_2x_2\right)W_2+$$
$$+w\left(\frac{\partial W}{\partial x_3}+\frac{\partial W_1}{\partial x_3}x_1+\frac{\partial W_2}{\partial x_3}x_2\right)=-\left(P_2+P_{12}x_1+P_{22}x_2\right)+\nu\left(\frac{\partial^2 W}{\partial x_3^2}+\frac{\partial^2 W_1}{\partial x_3^2}x_1+\frac{\partial^2 W_2}{\partial x_3^2}x_2\right),$$
$$\frac{\partial w}{\partial t}+w\frac{\partial w}{\partial x_3}=-\left(\frac{\partial P_0}{\partial x_3}+\frac{\partial P_1}{\partial x_3}x_1+\frac{\partial P_2}{\partial x_3}x_2+\frac{\partial P_{11}}{\partial x_3}\frac{x_1^2}{2}+\frac{\partial P_{12}}{\partial x_3}x_1x_2+\frac{\partial P_{22}}{\partial x_3}\frac{x_2^2}{2}\right)+\nu\frac{\partial^2 w}{\partial x_3^2},$$
$$\frac{\partial T_0}{\partial t}+\frac{\partial T_1}{\partial t}x_1+\frac{\partial T_2}{\partial t}x_2+\frac{\partial T_{11}}{\partial t}\frac{x_1^2}{2}+\frac{\partial T_{12}}{\partial t}x_1x_2+\frac{\partial T_{22}}{\partial t}\frac{x_2^2}{2}+$$
$$+\left(U+U_1x_1+U_2x_2\right)\left(T_1+T_{11}x_1+T_{12}x_2\right)+\left(W+W_1x_1+W_2x_2\right)\left(T_2+T_{12}x_1+T_{22}x_2\right)+$$
$$+w\left(\frac{\partial T_0}{\partial x_3}+\frac{\partial T_1}{\partial x_3}x_1+\frac{\partial T_2}{\partial x_3}x_2+\frac{\partial T_{11}}{\partial x_3}\frac{x_1^2}{2}+\frac{\partial T_{12}}{\partial x_3}x_1x_2+\frac{\partial T_{22}}{\partial x_3}\frac{x_2^2}{2}\right)=$$
$$\chi\left(T_{11}+T_{22}+\frac{\partial^2 T_0}{\partial x_3^2}+\frac{\partial^2 T_1}{\partial x_3^2}x_1+\frac{\partial^2 T_2}{\partial x_3^2}x_2+\frac{\partial^2 T_{11}}{\partial x_3^2}\frac{x_1^2}{2}+\frac{\partial^2 T_{12}}{\partial x_3^2}x_1x_2+\frac{\partial^2 T_{22}}{\partial x_3^2}\frac{x_2^2}{2}\right)+$$
$$+\frac{\nu}{c_p}\left[2\left(U_1^2+W_2^2\right)+\left(U_2+W_1\right)^2+2\left(\frac{\partial w}{\partial x_3}\right)^2\right]+$$
$$+\frac{\nu}{c_p}\left[\left(\frac{\partial U}{\partial x_3}+\frac{\partial U_1}{\partial x_3}x_1+\frac{\partial U_2}{\partial x_3}x_2\right)^2+\left(\frac{\partial W}{\partial x_3}+\frac{\partial W_1}{\partial x_3}x_1+\frac{\partial W_2}{\partial x_3}x_2\right)^2\right];$$
$$U_1+W_2+\frac{\partial w}{\partial x_3}=0. \qquad (6)$$

В системе уравнений (6) раскрываем скобки, группируем выражения при одинаковых степенях горизонтальных координат x_1 и x_2, далее применяем метод неопределенных коэффициентов и получаем систему уравнений для определения девятнадцати неизвестных функций из (4) и (5):

$$\frac{\partial U_1}{\partial t}+U_1^2+U_2W_1+w\frac{\partial U_1}{\partial x_3}=-P_{11}+\nu\frac{\partial^2 U_1}{\partial x_3^2},$$
$$\frac{\partial U_2}{\partial t}+U_1U_2+U_2W_2+w\frac{\partial U_2}{\partial x_3}=-P_{12}+\nu\frac{\partial^2 U_2}{\partial x_3^2},$$
$$\frac{\partial U}{\partial t}+U_1U+U_2W+w\frac{\partial U}{\partial x_3}=-P_1+\nu\frac{\partial^2 U}{\partial x_3^2},$$
$$\frac{\partial W_1}{\partial t}+U_1W_1+W_2W_1+w\frac{\partial W_1}{\partial x_3}=-P_{12}+\nu\frac{\partial^2 W_1}{\partial x_3^2},$$

$$\frac{\partial W_2}{\partial t}+W_1U_2+W_2^2+w\frac{\partial W_2}{\partial x_3}=-P_{22}+\nu\frac{\partial^2 W_2}{\partial x_3^2},$$

$$\frac{\partial W}{\partial t}+W_1U+W_2W+w\frac{\partial W}{\partial x_3}=-P_2+\nu\frac{\partial^2 W}{\partial x_3^2},$$

$$\frac{\partial P_1}{\partial x_3}=0,\ \frac{\partial P_{11}}{\partial x_3}=0,\ \frac{\partial P_2}{\partial x_3}=0,\ \frac{\partial P_{22}}{\partial x_3}=0,\ \frac{\partial P_{12}}{\partial x_3}=0,$$

$$\frac{\partial w}{\partial t}+w\frac{\partial w}{\partial x_3}=-\frac{\partial P_0}{\partial x_3}+\nu\frac{\partial^2 w}{\partial x_3^2},$$

$$\frac{\partial w}{\partial x_3}=-\left(U_1+W_2\right),$$

$$\frac{\partial T_1}{\partial t}+UT_{11}+U_1T_1+WT_{12}+W_1T_2+w\frac{\partial T_1}{\partial x_3}=\chi\frac{\partial^2 T_1}{\partial x_3^2}+\frac{2\nu}{c_p}\left(\frac{\partial U}{\partial x_3}\frac{\partial U_1}{\partial x_3}+\frac{\partial W}{\partial x_3}\frac{\partial W_1}{\partial x_3}\right),$$

$$\frac{\partial T_{11}}{\partial t}+2U_1T_{11}+2W_1T_{12}+\omega\frac{\partial T_{11}}{\partial x_3}=\chi\frac{\partial^2 T_{11}}{\partial x_3^2}+\frac{\nu}{c_p}\left[\left(\frac{\partial U_1}{\partial x_3}\right)^2+\left(\frac{\partial W_1}{\partial x_3}\right)^2\right],$$

$$\frac{\partial T_2}{\partial t}+UT_{12}+U_2T_1+WT_{22}+W_2T_2+w\frac{\partial T_2}{\partial x_3}=\chi\frac{\partial^2 T_2}{\partial x_3^2}+\frac{2\nu}{c_p}\left(\frac{\partial U}{\partial x_3}\frac{\partial U_2}{\partial x_3}+\frac{\partial W}{\partial x_3}\frac{\partial W_2}{\partial x_3}\right),$$

$$\frac{\partial T_{12}}{\partial t}+U_1T_{12}+U_2T_{11}+W_1T_{22}+W_2T_{12}+w\frac{\partial T_{12}}{\partial x_3}=\chi\frac{\partial^2 T_{12}}{\partial x_3^2}+\frac{2\nu}{c_p}\left(\frac{\partial U_2}{\partial x_3}\frac{\partial U_1}{\partial x_3}+\frac{\partial W_2}{\partial x_3}\frac{\partial W_1}{\partial x_3}\right),$$

$$\frac{\partial T_{22}}{\partial t}+2U_2T_{12}+2W_2T_{22}+w\frac{\partial T_{22}}{\partial x_3}=\chi\frac{\partial^2 T_{22}}{\partial x_3^2}+\frac{\nu}{c_p}\left[\left(\frac{\partial U_2}{\partial x_3}\right)^2+\left(\frac{\partial W_2}{\partial x_3}\right)^2\right],$$

$$\frac{\partial T_0}{\partial t}+UT_1+WT_2+w\frac{\partial T_0}{\partial x_3}=\chi\left(T_{11}+T_{22}\right)+\chi\frac{\partial^2 T_0}{\partial x_3^2}$$

$$+\frac{\nu}{c_p}\left(2\left(U_1^2+W_2^2\right)+\left(U_2+W_1\right)^2+2\left(\frac{\partial w}{\partial x_3}\right)^2+\left(\frac{\partial U}{\partial x_3}\right)^2+\left(\frac{\partial W}{\partial x_3}\right)^2\right). \qquad (7)$$

Система (7) состоит из тринадцати неоднородных уравнений в частных производных параболического типа $(1+1)$ с конвективным слагаемым и из шести уравнений градиентного типа для определения неизвестных функций, входящих в точное решение (4) и (5). Таким образом, система (7) распадается на две слабосвязанные подсистемы. После нахождения функций, описывающих поле скоростей и давления, необходимо проинтегрировать оставшиеся уравнения для нахождения температуры (функции) распределения тепла.

НЕКОТОРЫЕ ЧАСТНЫЕ СЛУЧАИ

Для начала заметим, что часть уравнений, содержащихся в (7) интегрируется явно:

$$\frac{\partial P_1}{\partial x_3}=0,\ \frac{\partial P_{11}}{\partial x_3}=0,\ \frac{\partial P_2}{\partial x_3}=0,\ \frac{\partial P_{22}}{\partial x_3}=0,\ \frac{\partial P_{12}}{\partial x_3}=0.$$

Очевидно, что функции P_1, P_2, P_{11}, P_{12} и P_{22} зависят только от времени, следовательно, можно уточнить выражение (5) для давления:

$$P=P_0\left(x_3,t\right)+P_1\left(t\right)x_1+P_2\left(t\right)x_2+P_{11}\left(t\right)\frac{x_1^2}{2}+P_{12}\left(t\right)x_1x_2+P_{22}\left(t\right)\frac{x_2^2}{2}.$$

Отметим, что фоновое давление может быть получено посредством интегрирования уравнения

$$\frac{\partial w}{\partial t}+w\frac{\partial w}{\partial x_3}=-\frac{\partial P_0}{\partial x_3}+\nu\frac{\partial^2 w}{\partial x_3^2}$$

следующей квадратурой с точностью до аддитивной функции:

$$P_0=\int\left(\nu\frac{\partial^2 w}{\partial x_3^2}-\frac{\partial w}{\partial t}-w\frac{\partial w}{\partial x_3}\right)dx_3+f\left(t\right).$$

Уравнения движения (7) могут быть сравнительно проинтегрированы для классического однонаправленного установившегося течения Куэтта, но с учетом диссипативной функции Рэлея. В этом случае точное решение (4) и (5) трансформируется к виду

$$V_1=U\left(x_3\right),$$

$$T=T_0\left(x_3\right)+T_1\left(x_3\right)x_1+T_2\left(x_3\right)x_2+T_{11}\left(x_3\right)\frac{x_1^2}{2}+T_{12}\left(x_3\right)x_1x_2+T_{22}\left(x_3\right)\frac{x_2^2}{2}.$$

Система (7) редуцируется к системе обыкновенных дифференциальных уравнений, которая записывается следующим образом:

$$\frac{d^2U}{dx_3^2}=0,$$

$$\frac{d^2T_1}{dx_3^2}=0,\ \frac{d^2T_2}{dx_3^2}=0,\ \frac{d^2T_{11}}{dx_3^2}=0,\ \frac{d^2T_{12}}{dx_3^2}=0,\ \frac{d^2T_{22}}{dx_3^2}=0,$$

$$\chi\frac{d^2T_0}{dx_3^2}=UT_1-\chi\left(T_{11}+T_{22}\right)-\frac{2\nu}{c_p}\left(\frac{dU}{dx_3}\right)^2. \qquad (8)$$

Система обыкновенных дифференциальных уравнений четырнадцатого порядка может быть последовательно легко проинтегрирована. Выпишем решения обыкновенных дифференциальных уравнений только для тех функций, которые определяют закон изменения фоновой температуры T_0:

$$U=C_1z+C_2,\ T_1=C_3z+C_4,\ T_{11}=C_5z+C_6,\ T_{22}=C_7z+C_8.$$

В последних формулах символами C_1, C_2, C_3, C_4, C_5, C_6, C_7 и C_8 обозначены постоянные интегрирования для уравнений (8). После подстановки полученных решений в стационарное уравнение переноса тепла и двукратного его интегрирования, получим формулу

$$T_0=\frac{1}{\chi}\left(C_1C_3\frac{z^4}{12}+\left(C_2C_3+C_1C_4\right)\frac{z^3}{6}+C_2C_4\frac{z^2}{2}\right)-\left(C_5+C_7\right)\frac{z^3}{6}-\left(C_6+C_8\right)\frac{z^2}{2}-\frac{\nu}{\chi c_p}C_1^2z^2,$$

которая иллюстрирует возможность управления тепловым полем при диссипации механической энергии даже для установившегося течения. Аналогично точное решение можно получить для однонаправленного течения Пуазейля и Куэтта-Пуазейля с учетом локального тепловыделения.

Система уравнений (7) описывает широкий класс течений. Заметим, что она может быть упрощена посредством линеаризации конвективной производной, содержащейся в уравнениях Навье-Стокса и в уравнении теплопроводности [1, 5, 6]. При использовании приближения Стокса (число Рейнольдса или Грасгофа мало) пренебрегают слагаемым $\left(\mathbf{V}\cdot\nabla\right)\mathbf{V}$ в уравнении Навье-Стокса (1). При этом вклад конвективного перемешивания $\left(\mathbf{V}\cdot\nabla\right)T$ в уравнении переноса тепла может быть принят во внимание или проигнорирован

по аналогии с ползущими течениями. Аналогичное замечание справедливо для течения типа Озеена. Для этого вектор скорости $\mathbf{V}$ в конвективных производных $(\mathbf{V}\cdot\nabla)\mathbf{V}$ и $(\mathbf{V}\cdot\nabla)T$ аппроксимируется постоянным вектором $\mathbf{U}=(A,B,C)$. После этого повторяется процедура вывода уравнений (7), с которой можно ознакомиться в [1, 2, 19, 23].

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В статье анонсированы новые точные решения уравнений гидродинамики, которые описывают влияние диссипативной функции Рэлея на перенос тепла в жидкости без учета конвективного движения. Показано, что широкий класс точных решений для течений жидкости с учетом переноса тепла совпадает с семейством Линя-Сидорова-Аристова, удовлетворяющего уравнениям естественной конвекции Обербека-Буссинеска для ньютоновской несжимаемой жидкости. Приведенные в статье точные решения помогут разработать алгоритмы управления нелинейностями с разными релаксационными временами и пространственными масштабами, обусловленными учетом конвективной производной и суммой квадратов касательных напряжений в уравнениях движения.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Ershkov S. V, Prosviryakov E. Yu, Burmasheva N. V, Christianto V. Towards understanding the algorithms for solving the Navier-Stokes equations // Fluid Dynamics Research, 2021, vol. 53, no. 4, p. 044501. https://doi.org/10.1088/1873-7005/ac10f0

2. Аристов С. Н., Князев Д. В., Полянин А. Д. Точные решения уравнений Навье-Стокса с линейной зависимостью компонент скорости от двух пространственных переменных // Теоретические основы химической технологии. 2009. Т. 43, № 5. С. 547-566.

3. Drazin P. G., Riley N. The Navier-Stokes Equations: A classification of flows and exact solutions. Cambridge: Cambridge Univ. Press, 2006. 196 p. https://doi.org/10.1017/CBO9780511526459

4. Пухначев В. В. Симметрии в уравнениях Навье-Стокса // Успехи механики. 2006. Т. 4, № 1. С. 6-76.

5. Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М. Гидродинамика. Теоретическая физика. Том VI. Изд. 4-е, стереотипное. М.: Наука, 1988. 736 с.

6. Гершуни Г. З., Жуховицкий Е. М. Конвективная устойчивость несжимаемой жидкости. М.: Наука, 1972. 392 с.

7. Baranovskii E. S., Domnich A. A., Artemov M. A. Optimal boundary control of non-isothermal viscous fluid flow // Fluids, 2019, vol. 4, no. 3, Article ID 133(1-14). https://doi.org/10.3390/fluids4030133

8. Барановский Е. С., Домнич А. А. О модели протекания неравномерно нагретой вязкой жидкости через ограниченную область // Дифференциальные уравнения. 2020. Т. 56, № 3. С. 317-327. https://doi.org/10.1134/S0374064120030036

REFERENCES

1. Ershkov S. V, Prosviryakov E. Yu, Burmasheva N. V, Christianto V. Towards understanding the algorithms for solving the Navier-Stokes equations. *Fluid Dynamics Research*, 2021, vol. 53, no. 4, p. 044501. https://doi.org/10.1088/1873-7005/ac10f0

2. Aristov S. N., Knyazev D. V., Polyanin A. D. Exact solutions of the Navier-Stokes equations with the linear dependence of velocity components on two space variables. *Theoretical Foundations of Chemical Engineering*, 2009, vol. 43, no. 5, pp. 642-662. https://doi.org/10.1134/S0040579509050066

3. Drazin P. G., Riley N. *The Navier-Stokes Equations: A classification of flows and exact solutions*. Cambridge: Cambridge Univ. Press, 2006. 196 p. https://doi.org/10.1017/CBO9780511526459

4. Pukhnachev V. V. Simmetrii v uravneniyakh Nav'e-Sroksa [Symmetries in Navier-Stokes equations]. *Uspekhi mekhaniki* [Achievements in Mechanics], 2006, vol. 4, no. 1, pp. 6-76. (In Russian).

5. Landau L. D., Lifshitz E. M. Fluid Mechanics: vol. 6 (Course of Theoretical Physics S), 2nd Edition. Butterworth-Heinemann, 1987. 560 p.

6. Gershuni G. Z., Zhukhovitskii E. M. Convective stability of incompressible fluids. Israel Program for Scientific Translations. Jerusalem: Keter Publishing House, 1976. 330 p.

7. Baranovskii E. S., Domnich A. A., Artemov M. A. Optimal boundary control of non-isothermal viscous fluid flow. *Fluids*, 2019, vol. 4, no. 3, Article ID 133(1-14). https://doi.org/10.3390/fluids4030133

8. Baranovskii E. S., Domnich A. A. Model of a nonuniformly heated viscous flow through a bounded domain. *Differential Equations,* 2020, vol. 6, no. 3, pp. 304-314. https://doi.org/10.1134/S0012266120030039

9. Бетелин В. Б., Галкин В. А. Задачи управления параметрами несжимаемой жидкости при изменении во времени геометрии течения // Доклады Академии наук. 2015. Т. 463, № 2. С. 149-151. https://doi.org/10.7868/S0869565215200037

10. Алтоиз Б. А., Савин Н. В., Шатагина Е. А. Влияние тепловыделения в микропрослойке жидкости при измерении ее вязкости // Журнал технической физики. 2014. Т. 84, № 5. С. 21-27.

11. Lin C. C. Note on a class of exact solutions in magnetohydrodynamics // Archive for Rational Mechanics and Analysis, 1957, vol. 1, pp. 391-395. https://doi.org/10.1007/BF00298016

12. Сидоров А. Ф. О двух классах решений уравнений механики жидкости и газа и их связи с теорией бегущих волн // Прикладная механика и техническая физика. 1989. № 2. С. 34-40.

13. Аристов С. Н. Вихревые течения в тонких слоях жидкости: Автореф. дис. докт. физ.-мат. наук. Владивосток, 1990.

14. Аристов С. Н., Просвиряков Е. Ю. Неоднородные течения Куэтта // Нелинейная динамика. 2014. Т. 10, вып. 2. С. 177-182. https://doi.org/10.20537/nd1402004

15. Аристов С. Н., Просвиряков Е. Ю. Крупномасштабные течения завихренной вязкой несжимаемой жидкости // Известия высших учебных заведений. Авиационная техника. 2015, № 4. С. 50-54.

16. Горулева Л. С., Просвиряков Е. Ю. Неоднородное сдвиговое течение Куэтта-Пуазейля при движении нижней границы горизонтального слоя // Химическая физика и мезоскопия. 2021. Т. 23, № 4. С. 403-411. https://doi.org/10.15350/17270529.2021.4.36

17. Бурмашева Н. В., Просвиряков Е. Ю. Точное решение уравнений Навье-Стокса, описывающее пространственно неоднородные течения вращающейся жидкости // Труды Института математики и механики УрО РАН. 2020. Т. 26, № 2. С. 79-87. https://doi.org/10.21538/0134-4889-2020-26-2-79-87

18. Зубарев Н. М., Просвиряков Е.Ю. О точных решениях для слоистых трехмерных нестационарных изобарических течений вязкой несжимаемой жидкости // Прикладная механика и техническая физика. 2019. Т. 60, № 6 (358). С. 65-71. https://doi.org/10.15372/PMTF20190607

9. Betelin V. B., Galkin V. A. Control of incompressible fluid parameters in the case of time-varying flow geometry. *Doklady Mathematics*, 2015, vol. 92, no. 1, pp. 511-513. https://doi.org/10.1134/S1064562415040067

10. Altoiz B. A., Savin N. V., Shatagina E. A. Effect of heat release in a microinterlayer of a liquid on the measurement of its viscosity. *Technical Physics,* 2014. vol. 59. no. 5. pp. 649-655. https://doi.org/10.1134/S1063784214050028

11. Lin C. C. Note on a class of exact solutions in magnetohydrodynamics. *Archive for Rational Mechanics and Analysis*, 1957, vol. 1, pp. 391-395. https://doi.org/10.1007/BF00298016

12. Sidorov A. F. Two classes of solutions of the fluid and gas mechanics equations and their connection to traveling wave theory. *Journal of Applied Mechanics and Technical Physics*, 1989, vol. 30, no. 2, p. 197-203. https://doi.org/10.1007/BF00852164

13. Aristov S. N. *Vikhrevye techeniya v tonkikh sloyakh zhidkosti* [Eddy currents in thin liquidlayers]. Abstract dis. Dokt. Fiz.-Mat. nauk.Vladivostok, 1990. (In Russian).

14. Aristov S. N., Prosviryakov E. Yu. Neodnorodnye techeniya Kuetta [Inhomogeneous Couette flow]. *Nelineynaya dinamika* [Russian Journal of Nonlinear Dynamics], 2014, vol. 10, no. 2, pp. 177-182. (In Russian). https://doi.org/10.20537/nd1402004

15. Aristov S. N., Prosviryakov E. Y. Large-scale flows of viscous incompressible vortical fluid. *Russian Aeronautics*, 2015, vol. 58, no. 4, pp. 413-418. https://doi.org/10.3103/S1068799815040091

16. Goruleva L. S., Prosviryakov E. Yu. Neodnorodnoe sdvigovoe techenie Kuetta-Puazejlya pri dvizhenii nizhnej granicy gorizontal'nogo sloya [The Couette Poiseuille Inhomogeneous Shear Flow with the Motion of the Lower Boundary of the Horizontal Layer]. *Khimicheskaya fizika i mezoskopiya* [Chemical Physics and Mesoscopy], 2021, vol. 23, no. 4, pp. 403-411. (In Russian). https://doi.org/10.15350/17270529.2021.4.36

17. Burmasheva N. V, Prosviryakov E. Yu. Tochnoe reshenie uravneniy Nav'e-Stoksa, opisyvayushchee prostranstvenno neodnorodnye techeniya vrashchayushcheysya zhidkosti [Exact solution of Navier-Stokes equations describing spatially inhomogeneous flows of a rotating fluid]. *Trudy Instituta Matematiki i Mekhaniki UrO RAN* [Proc. IMM UB RAS], 2020. vol. 26, no. 2, pp. 79-87. (In Russian). https://doi.org/10.21538/0134-4889-2020-26-2-79-87

18. Zubarev N. M., Prosviryakov E. Yu. Exact Solutions for the Layered Three-Dimensional Nonstationary Isobaric Flows of Viscous Incompressible Fluid. *Journal of Applied Mechanics and Technical Physics*, 2019, vol. 60, no. 6, pp. 1031-1037. https://doi.org/10.1134/S0021894419060075

19. Просвиряков Е. Ю. Новый класс точных решений уравнений Навье-Стокса со степенной зависимостью скоростей от двух пространственных координат // Теоретические основы химической технологии. 2019. Т. 53, № 1. С. 112-120.

20. Просвиряков Е. Ю., Спевак Л. Ф. Пространственно неоднородные слоистые течения вязкой несжимаемой жидкости // Теоретические основы химической технологии. 2018. Т. 52, № 5. С. 483-488.

21. Просвиряков Е. Ю. Слоистые градиентные стационарные течения вертикально завихренной вязкой несжимаемой жидкости // Материалы 3 Рос. конф. "Математическое моделирование и информационные технологии", 2016, Т. 1825. С. 164-172. http://ceur-ws.org/Vol-1825/p21.pdf

22. Алексеенко Е. А., Горшков А. В., Просвиряков Е. Ю. Слоистая конвекция Марангони при учете теплообмена по закону Ньютона-Рихмана. Сообщение 1. Исследование поля скоростей // Химическая физика и мезоскопия. 2018. Т. 20, № 1. С. 15-27.

23. Аристов С. Н., Просвиряков Е. Ю. Новый класс точных решений трехмерных уравнений термодиффузии // Теоретические основы химической технологии. 2016. Т. 50, № 3. С. 294-301. https://doi.org/10.7868/S0040357116030027

19. Prosviryakov E. Yu. New Class of Exact Solutions of Navier-Stokes Equations with Exponential Dependence of Velocity on Two Spatial Coordinates. *Theoretical Foundations of Chemical Engineering*, 2019, vol. 53, no. 1, pp. 107-114. https://doi.org/10.1134/S0040579518060088

20. Prosviryakov E. Yu., Spevak L. F. Layered Three-Dimensional NonUniform Viscous Incompressible Flows. *Theoretical Foundations of Chemical Engineering*, 2018, vol. 52, no. 5, pp. 765-770. https://doi.org/10.1134/S0040579518050391

21. Prosviryakov E. Yu. Sloistye gradientnye statsionarnye techeniya vertikal'no zavikhrennoy vyazkoy neszhimaemoy zhidkosti [Layered gradient stationary flow vertically swirling viscous incompressible fluid]. *CEUR Workshop Proceedings*, 2016, vol. 1825, pp. 164-172. (In Russian). http://ceur-ws.org/Vol-1825/p21.pdf

22. Alekseenko E. A., Gorshkov A. V., Prosviryakov E. Yu. Sloistaya konvektsiya Marangoni pri uchete teploobmena po zakonu N'yutona-Rikhmana. Soobshchenie 1. Issledovanie polya skorostey [Layered Marangoni Convection during Heat Transfer According to the Newton's Law of Cooling. Part 1. Investigation of the Velocity Field]. *Khimicheskaya fizika i mezoskopiya* [Chemical Physics and Mesoscopy], 2018, vol. 20, no. 1, pp. 15-27. (In Russian).

23. Aristov S. N., Prosviryakov E. Y. A new class of exact solutions for three-dimensional thermal diffusion equations. *Theoretical Foundations of Chemical Engineering*, 2016, vol. 50, no. 3, p. 286-293. https://doi.org/10.1134/S0040579516030027

Поступила 14.03.2022; после доработки 06.04.2022; принята к опубликованию 11.04.2022
Received 14 March 2022; received in revised form 06 April 2022; accepted 11 April 2022

Информация об авторах

Горулева Лариса Сергеевна, *научный сотрудник, ИМАШ УрО РАН, Екатеринбург, Российская Федерация*

Просвиряков Евгений Юрьевич, *доктор физико-математических наук, заведующий сектором, главный научный сотрудник, ИМАШ УрО РАН, Екатеринбург, Российская Федерация, e-mail: evgen_pros@mail.ru*

Information about the authors

Larisa S. Goruleva, *Researcher, Institute of Engineering Science UB RAS, Ekaterinburg, Russian Federation*

Evgenii Yu. Prosviryakov, *Dr. Sci. (Phys.-Math.), Head of Department, Chief Researcher, Institute of Engineering Science UB RAS, Ekaterinburg, Russian Federation, e-mail: evgen_pros@mail.ru*