https://doi.org/10.15350/17270529.2021.4.36

УДК 532.51

Неоднородное сдвиговое течение Куэтта-Пуазейля при движении нижней границы горизонтального слоя

Л. С. Горулева, Е. Ю. Просвиряков

Институт машиноведения УрО РАН, Россия, 620049, Екатеринбург, ул. Комсомольская, д. 34

Аннотация. В статье получено точное решение уравнений Навье-Стокса и уравнения несжимаемости. Это решение описывает установившееся изобарическое и градиентное неоднородное сдвиговое течение вязкой несжимаемой жидкости. Движение жидкости при постоянном давлении индуцируется движением нижней границы бесконечного горизонтального слоя жидкости. Неоднородное течение жидкости типа Пуазейля рассматривается при совместном задании постоянного горизонтального градиента давления и скоростей. Сдвиговое изотермическое течение вязкой несжимаемой жидкости описывается переопределенной системой уравнений в частных производных. Точное интегрирование уравнений Навье-Стокса осуществляется в классе Линя-Сидорова-Аристова. Поле скоростей и поле давления являются линейными формами относительно двух координат (горизонтальных или продольных координат). Коэффициенты линейных формы зависят от третьей (вертикальной или поперечной) координаты. Благодаря структуре точного решения, уравнение несжимаемости автоматически удовлетворяется. Таким образом, роль "лишнего" уравнения играет уравнение несжимаемости. Проведен анализ полученного полиномиального точного решения уравнений Навье-Стокса для несжимаемой жидкости. Неоднородное течение типа Куэтта характеризуется полиномом четвертой степени. Для описания модифицированного течения Пуазейля используется полином пятой степени. Исследование локализации корней полинома показало существование немонотонного профиля удельной кинетической энергии с двумя нулевыми значениями. Иными словами, в жидкости регистрируются противотечения.

Ключевые слова: точное решение, уравнение Навье-Стокса, уравнение несжимаемости, переопределенная система, изобарическое течение, градиентное течение.

✉ *Евгений Просвиряков, e-mail: evgen_pros@mail.ru*

The Couette-Poiseuille Inhomogeneous Shear Flow at the Motion of the Lower Boundary of the Horizontal Layer

Larisa S. Goruleva, Evgenii Yu. Prosviryakov

Institute of Engineering Science UB RAS (34, Komsomolskaya St., Ekaterinburg, 620049, Russian Federation)

Summary. In the present paper, an exact solution of the Navier-Stokes equations and incompressibility equation is obtained. The solution describes the steady-state isobaric and gradient inhomogeneous shear flow of a viscous incompressible fluid. The fluid motion under constant pressure is induced by the motion of the lower boundary of an infinite horizontal fluid layer. The Poiseuille-type inhomogeneous fluid flow is considered under the condition that the horizontal gradients of pressure and velocities are specified as constant. The isothermal shear flow of a viscous incompressible fluid is described by an overdetermined system of partial equations. The quadratically nonlinear system consists of four equations, in which two components of velocity and pressure are to be computed by integration. In order to find a nontrivial exact solution (different from the zero), the differential constraint method is applied, which allows to find a redundant equation in the overdetermined system. A family of exact solutions to the Navier-Stokes equations is used as the differential constraints of overdetermined nonlinear equations describing shear flows of fluids. The exact integration of the Navier-Stokes equations is performed in the Lin-Sidorov-Aristov class. The velocity field and the pressure field are linear forms with respect to two ((horizontal or longitudinal) coordinates. The linear form coefficients depend on the third (vertical or transverse) coordinate. Owing to the structure of the exact solution, the incompressibility equation is automatically satisfied. Thus, it is the incompressibility equation that acts as the redundant equation. The obtained polynomial exact solution of the Navier-Stokes equations for incompressible fluids is analyzed. The Couette-type inhomogeneous flow is characterized by a fourth-degree polynomial. A fifth-degree polynomial is used to describe the modified Poiseuille flow. The study of the localization of the polynomial roots has shown the existence of the nonmonotonic profile of specific kinetic energy with two zero values. In other words, there are counterflows in the fluid.

Keywords: exact solution, Navier-Stokes equation, incompressibility equation, overdetermined system, isobaric flow, gradient flow.

✉ *Evgenii Prosviryakov, e-mail: evgen_pros@mail.ru*

ВВЕДЕНИЕ

Поиск точных решений уравнений Навье-Стокса, дополненных уравнением несжимаемости, является важной задачей современной гидродинамики изотермических жидкостей [1 – 4]. Основная трудность, мешающая интегрированию уравнений движений вязкой жидкости, связана с квадратичной нелинейностью законов сохранения момента импульса, поэтому для понимания качественных особенностей уравнений Навье-Стокса необходимо иметь запас точных решений. На протяжении всего времени аналитического и численного интегрирования уравнений для движущейся несжимаемой жидкости ведется дискуссия среди гидродинамиков о целесообразности нахождения новых классов точных решений [1 – 4].

После публикации нового точного решения оно внимательнейшим образом изучается специалистами различных разделов гидродинамики. В статье было [5] замечено, что математики, механики и физики по-разному понимают и интерпретируют точное решение уравнений Навье-Стокса. Сначала рецензенты и авторы других статей констатируют недостатки. К ним относят: узкую область применимости, слишком сильные математические ограничения при формализации физического процесса, пренебрежение частью слагаемых в уравнениях Навье-Стокса [1]. Проходит какое-то время и точные решения находят свое практическое применение. Помимо описания новых физических механизмов, они являются бесспорными помощниками для тестирования программных комплексов и для верификации численных методов [1, 6, 7].

Наиболее яркими примерами использования точных решений уравнений Навье-Стокса для несжимаемых сред служат: формула Пуазейля [1 – 4], необходимая для исследования сердечно-сосудистой системы ультразвуком; точное решение Куэтта-Тейлора обосновало применение вискозиметра Куэтта для определения динамической (кинематической) вязкости жидкости [1 – 4]; решение Кармана [1 – 4], на котором построена работа дискового электрода Левича [1 – 4].

Когда научное сообщество привыкает к новому точному решению, то у него появляется ощущение того, что полученные соотношения для поля скоростей являются окончательными и не могут больше подвергаться модификации и обобщению. В связи с этим довольно часто встает вопрос о необходимости разработки новых способов, алгоритмов вычисления новых точных решений уравнений Навье-Стокса. Хотя достаточно очевидно, что для инженерных расчетов использование формул может увеличить скорость разработки новых технологий и создания новых изделий.

В данной статье будет приведено обобщение двух классических точных решений. Впервые точное решение Куэтта, описывающее установившееся неоднородное течение жидкости двумерное по скоростям и трехмерное по координатам было описано в статье [8]. Другие краевые и начально-краевые задачи для изобарических слоистых и сдвиговых течений были исследованы в библиографических источниках [9 – 14]. Характерной особенностью опубликованных точных решений являлось наличие вертикальной компоненты вектора завихренности без предварительного вращения. Иными словами, слоистое течение переходит в сдвиговая без приложения поля Кориолиса.

Постановка задач для описания градиентных течений (движения жидкости типа Пуазейля) была рассмотрена в статье [15]. В работах [8, 9, 15] было показано, что рассмотренные краевые задачи можно использовать при моделировании экваториальных противотечениях и движении несжимаемых сред в аппаратах химической технологии и в авиационной технике. Рассматривалось классическое обобщение течений Куэтта и Пуазейля в горизонтальном бесконечном слое жидкости: нижняя граница полагалось неподвижной [8 – 10, 14 – 16]. Тем не менее, для приложений важно изучить движения жидкости при движущейся нижней границе слоя жидкости. В данной статье частично ликвидируется пробел таких исследования для неоднородных течений вязкой несжимаемой жидкости.

ПОСТАНОВКА КРАЕВОЙ ЗАДАЧИ

Рассмотрим установившиеся сдвиговые течения вязкой несжимаемой жидкости в бесконечном горизонтальном тонком слое. Движение среды описывается тремя уравнениями момента импульса (уравнениями Навье-Стокса) и уравнением несжимаемости [10, 12, 15]:

$$V_x \frac{\partial V_x}{\partial x} + V_y \frac{\partial V_x}{\partial y} = -\frac{\partial P}{\partial x} + \nu \left(\frac{\partial^2 V_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 V_x}{\partial z^2} \right),$$

$$V_x \frac{\partial V_y}{\partial x} + V_y \frac{\partial V_y}{\partial y} = -\frac{\partial P}{\partial y} + \nu \left(\frac{\partial^2 V_y}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V_y}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 V_y}{\partial z^2} \right),$$

$$\frac{\partial P}{\partial z} = g,$$

$$\frac{\partial V_x}{\partial x} + \frac{\partial V_y}{\partial y} = 0. \tag{1}$$

Здесь x, y, z – декартовы координаты, $V_x(x,y,z)$ и $V_y(x,y,z)$ – компоненты вектора скорости, ν – кинематическая (молекулярная) вязкость жидкости, g – ускорение свободного падения, P – деленное на постоянную плотность давление.

Система уравнений (1) является переопределенной, поскольку для вычисления трех неизвестных функций: две компоненты вектора скорости V_x, V_y и давление P, имеется четыре уравнения. Для интегрирования системы (1) для разных случаев были предложены классы точных решений, позволяющих удовлетворить "лишнему" уравнению [1 – 4, 12]. Кроме того, в статьях [1 – 4, 12] были установлены преобразования, позволяющие "размножать" ("тиражировать") точные решения уравнений Навье-Стокса (1).

Движение жидкости в бесконечном слое индуцируется перемещением нижней границы $z = 0$ по закону:

$$V_x(x,y,0) = A + By, \quad V_y(x,y,0) = C. \tag{2}$$

Задание скоростей формулами (2) определяет неоднородное (непоступательное) движение границы слоя. Иными словами, реализуется совместное задание поступательного и вращательного движения, вызванное различными неоднородностями.

Полагаем, что скорость на свободной недеформируемой верхней границе слоя $z = h$ постоянная. Не ограничивая далее общности рассуждений, примем, что скорость на этой границе равна нулю:

$$V_x(x,y,h) = 0, \quad V_y(x,y,h) = 0. \tag{3}$$

Физически это означает, что фактически жидкость заключена между двумя бесконечно протяженными плоскими недеформируемыми пластинами. Сразу оговоримся, что для задания давления на свободной границе $z = h$, строго говоря, используется приближение твердой крышки с заданием нулевых скоростей [8, 14]. В этом случае тождественно выполняется кинематическое и динамическое граничное условие, а давление жидкости задано на свободной границе следующим образом:

$$P(x,y,h) = S + S_1 x + S_2 y. \tag{4}$$

Формула (4) задает давление в виде линейной формы, то есть помимо фонового давления заданы горизонтальные градиенты давления. Следует помнить, что в статье давление нормировано на плотность.

ТОЧНОЕ РЕШЕНИЕ

Точное решение системы нелинейных уравнений в частных производных (1) будем искать в виде [8 – 10, 14, 17 – 20]:

$$V_x = U(z) + U_1(z)y\,,\ V_y = V(z)\,,$$
$$P = P_0(z) + P_1(z)x + P_2(z)y\,. \tag{5}$$

Заметим, что формулы (5) описывают неоднородное крупномасштабное градиентное течение вязкой несжимаемой жидкости [8, 15].

Учитывая вид точного решения, вычислим частные производные, входящие в нелинейную систему уравнений (1)

$$\frac{\partial V_x}{\partial x} = \frac{\partial V_y}{\partial x} = \frac{\partial V_y}{\partial y} = \frac{\partial^2 V_x}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 V_x}{\partial y^2} = \frac{\partial^2 V_y}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 V_y}{\partial y^2} = 0\,,$$
$$\frac{\partial V_x}{\partial y} = U_1\,,\ \frac{\partial V_x}{\partial z} = \frac{\partial U}{\partial z} + y\frac{\partial U_1}{\partial z}\,,$$
$$\frac{\partial^2 V_x}{\partial z^2} = \frac{\partial^2 U}{\partial z^2} + y\frac{\partial^2 U_1}{\partial z^2}\,,\ \frac{\partial^2 V_y}{\partial z^2} = \frac{\partial^2 V}{\partial z^2}\,,$$
$$\frac{\partial P}{\partial x} = P_1\,,\ \frac{\partial P}{\partial y} = P_2\,,$$
$$\frac{\partial P}{\partial z} = \frac{\partial P_0}{\partial z} + x\frac{\partial P_1}{\partial z} + y\frac{\partial P_2}{\partial z}\,.$$

Подставим полученные выражения в систему (1), получим следующие уравнения:

$$VU_1 = -P_1 + \nu\left(U'' + yU_1''\right), \tag{6}$$
$$\nu V'' = P_2\,,$$
$$\frac{\partial P}{\partial z} = \frac{\partial P_0}{\partial z} + x\frac{\partial P_1}{\partial z} + y\frac{\partial P_2}{\partial z} = g\,. \tag{7}$$

Здесь и далее штрих обозначает дифференцирование по поперечной (вертикальной) координате z. Приравнивая в уравнениях (6) и (7) функции при одинаковых степенях y, получим систему для определения неизвестных функций:

$$\nu V'' = P_2\,, \tag{8}$$
$$U_1'' = 0\,,\ \nu U'' = VU_1 + P_1\,, \tag{9}$$
$$\frac{\partial P_0}{\partial z} = g\,,\ \frac{\partial P_1}{\partial z} = \frac{\partial P_2}{\partial z} = 0\,. \tag{10}$$

РЕШЕНИЕ КРАЕВОЙ ЗАДАЧИ

Для решения краевой задачи граничные условия (2) – (4) запишем в форме, согласованной со структурой точного решения (5):

$$U(0) = A,\ U_1(0) = B,\ V(0) = C,$$
$$U(h) = 0,\ U_1(h) = 0,\ V(h) = 0,$$
$$P_0(h) = S,\ P_1(h) = S_1,\ P_2(h) = S_2. \tag{11}$$

Обсудим использование граничных условий (11). Значения скоростей A и C по модулю не превосходят по модулю 5 м/с, а величина пространственного ускорения B имеет порядок $\frac{A}{l}$, где l – характерный масштаб по горизонтали. Давление, деленное на плотность жидкости, горизонтали может изменяться от -10^5 м²/с² до 10^5 м²/с². Отрицательное изменение давление обусловлено неодномерностью рассматриваемого потока, а широкий диапазон изменения – областью применимости сдвиговых течений (приближения тонкого слоя) от наногидродинамики до геофизической гидродинамики. По аналогии с оценкой пространственного ускорения можно получить характерные изменения параметров S_1 и S_2.

Проинтегрируем далее систему обыкновенных дифференциальных уравнений (8) – (10). Данная система разбита на две изолированные подсистемы. Уравнения (10) легко интегрируются, в силу граничных условий решения записываются следующим образом:

$$P_0 = g\left(z-h\right)+S,$$

$$P_1 = S_1, P_2 = S_2.$$

Таким образом, из полученного решения следует, что фоновое давление P_0 распределено по гидростатическому закону, а горизонтальные градиенты давления P_1 и P_2 постоянны по толщине слоя.

Подставим решения для продольных градиентов давления $P_1 = S_1$ и $P_2 = S_2$ в уравнения (8) и (9). Проинтегрируем изолированное обыкновенное дифференциальное уравнения второго порядка (8) для нахождения скорости V. Двукратным интегрированием получаем точное решение типа Пуазейля [1 – 4]:

$$V = \frac{S_2}{2\nu}z^2 + c_1 z + c_2. \tag{12}$$

Дальнейшее интегрирование уравнения (9) позволяет получить выражение для пространственного ускорения (горизонтального градиента скорости) U_1, которое определяется точным решением типа Куэтта [1 – 4]:

$$U_1 = c_3 z + c_4. \tag{13}$$

Для нахождения фоновой скорости подставим выражения (12) и (13) в дифференциальное уравнение (9):

$$\nu U'' = \left(\frac{S_2}{2\nu}z^2 + c_1 z + c_2\right)\left(c_3 z + c_4\right) + S_1.$$

После интегрирования последнего обыкновенного дифференциального уравнения второго порядка с полиномиальной неоднородностью получим точное решение:

$$U = \frac{S_2 c_3}{40\nu^2}z^5 + \left(\frac{S_2 c_4}{24\nu^2} + \frac{c_1 c_3}{12\nu}\right)z^4 + \left(\frac{c_1 c_4}{6\nu} + \frac{c_2 c_3}{6\nu}\right)z^3 + \left(\frac{S_1}{2\nu} + \frac{c_2 c_4}{2\nu}\right)z^2 + c_5 z + c_6. \tag{14}$$

В формулах (12) – (14) символами c_1, c_2, c_3, c_4, c_5 и c_6 обозначены постоянные интегрирования, которые будут далее вычислены с использованием граничных условий (11).

Подставляя граничные условия, получим систему для определения c_1 и c_2:

$$V\left(h\right) = \frac{S_2}{2\nu}h^2 + c_1 h + c_2 = 0,$$

$$V\left(0\right) = c_2 = C.$$

Находим константы интегрирования c_1 и c_2

$$c_1 = -\frac{C}{h} - \frac{S_2 h}{2\nu}, \; c_2 = C.$$

Получаем точное решение краевой задачи (8) и (11) для скорости $V_y = V$:

$$V_y = V = \frac{S_2}{2\nu}z^2 - \left(\frac{C}{h} + \frac{S_2 h}{2\nu}\right)z + C. \tag{15}$$

Формула (15) описывает точное решение типа Пуазейля.

Перейдем к нахождению постоянных интегрирования c_3, c_4, c_5 и c_6 для скорости V_x. Повторяя выкладки для определения свободных параметров c_1 и c_2 (решение линейных уравнений), получим решение краевой задачи (9), (11) для функций (13) и (14):

$$c_3 = -\frac{B}{h},\ c_4 = B,$$
$$c_5 = -\frac{A}{h} + \frac{S_2 B}{60\nu^2} h^3 - \left(\frac{CB - 2S_1}{4\nu} \right) h,\ c_6 = A.$$

Таким образом, выражения для U_1 и U соответственно имеют вид:

$$U_1 = B\left(1 - \frac{z}{h}\right),$$
$$U = -\frac{S_2 B}{40h\nu^2} z^5 + \left(\frac{S_2 B}{12\nu^2} + \frac{BC}{12h^2\nu} \right) z^4 - \left(\frac{S_2 Bh}{12\nu^2} + \frac{BC}{3h\nu} \right) z^3 + \frac{1}{2\nu}\left(S_1 + CB\right) z^2 -$$
$$-\left(\frac{A}{h} - \frac{S_2 B}{40\nu^2} h^3 + \left(\frac{CB + 2S_1}{4\nu} \right) h \right) z + A.$$

В последних выражениях фоновая скорость U описывается полиномом пятой степени, а пространственный градиент скорости U_1 – профилем Куэтта [1 – 4].

АНАЛИЗ ПОЛЯ СКОРОСТИ

Для исследования полученных скоростей градиентного течения перепишем выражение для скорости (14) в более удобном для исследования виде:

$$V = \frac{S_2 h^2}{2\nu} Z^2 - \left(C + \frac{S_2 h^2}{2\nu} \right) Z + C = \frac{S_2 h^2}{2\nu}\left(Z - 1\right)\left(Z - \frac{2\nu C}{S_2 h^2} \right). \tag{16}$$

Введена безразмерная поперечная координата $Z = \frac{z}{h}$, которая будет использоваться далее. Приведенная факторизация скорости V возможна только при градиентном течении жидкости. В этом случае в жидкости существуют противотечения. Граница реверсивных потоков определяется уравнением плоскости:

$$Z = \frac{2\nu C}{S_2 h^2},\ 0 < \frac{C}{S_2} < \frac{h^2}{2\nu}.$$

Любопытно, что противотечения в жидкости будут наблюдаться тогда, когда заданная скорость на границе C и градиент давления одного знака S_2. В том случае, если S_2, то решение (16) описывает однородное течение Куэтта [1 – 4]:

$$V = C\left(1 - Z\right).$$

Перейдем к изучению характерных свойств скорости $V_x = U(z) + U_1(z)y$. Исследование свойств линейной функции U_1 тривиально, поэтому сосредоточим внимание на изучении спектральных свойств полинома U, который для удобства перепишем следующим образом:

$$U = -\frac{S_2 Bh^4}{40\nu^2} Z^5 + \left(\frac{S_2 Bh^4}{12\nu^2} + \frac{BCh^2}{12\nu} \right) Z^4 - \left(\frac{S_2 Bh^4}{12\nu^2} + \frac{BCh^2}{3\nu} \right) Z^3 + \frac{h^2}{2\nu}\left(S_1 + CB\right) Z^2 -$$
$$-\left(A - \frac{S_2 Bh^4}{40\nu^2} + \left(\frac{CB + 2S_1}{4\nu} \right) h^2 \right) Z + A. \tag{17}$$

Если положить $S_1 = S_2 = 0$, то фоновая скорость жидкости описывается многочленом четвертой степени:

$$U = \frac{BCh^2}{12\nu} Z^4 - \frac{BCh^2}{3\nu} Z^3 + \frac{BCh^2}{2\nu} Z^2 - \left(A + \frac{BCh^2}{4\nu} \right) Z + A .$$

Этот многочлен в силу граничных условий имеет корень $Z = 1$. Исследование локализации корней показывает, что на интервале $(0;1)$ функция принимает нулевое значение при выполнении неравенства:

$$A \left(A - \frac{BCh^2}{12\nu} \right) < 0 .$$

Таким образом, при гидростатическом распределении давления и изобарическом течении жидкости существуют противотечения в жидкости. Нетрудно показать, что противотечения сопровождаются немонотонным профилем скорости. Аналогичные исследования при движении верхней границы и задании касательных напряжений на ней были проведены в статьях [8, 9, 13, 14]. При наличии градиента давления S_1 и равенстве нулю S_2 профиль скорости описывается выражением:

$$U = \frac{BCh^2}{12\nu} Z^4 - \frac{BCh^2}{3\nu} Z^3 + \frac{h^2}{2\nu}\left(S_1 + CB \right) Z^2 - \left(A + \left(\frac{CB + 2S_1}{4\nu} \right) h^2 \right) Z + A .$$

Влияние градиента S_1 из-за учета сил инерции при постановке задачи не приводит к появлению дополнительных зон противотечения. Ограничения на параметры, при комбинации которых, многочлен имеет один корень выглядят следующим образом:

$$A \left(A - \frac{BCh^2}{12\nu} - \frac{S_1 h^2}{2\nu} \right) < 0 .$$

Второй корень у многочлена (17) может появиться при ненулевом значении горизонтального градиента S_2. Это означает, что поток вязкой несжимаемой жидкости стратифицируется на три зоны. Это означает, что параметры краевой задачи всегда можно подбирать для регулировки толщин зон с противотечением, необходимых для технических устройств.

Заметим, что удельная кинетическая энергия:

$$E = \frac{\rho}{2}\left(V_x^2 + V_y^2 \right) = \left(U + U_1 y \right)^2 + V^2 = U^2 + V^2 + 2UU_1 y + U_1^2 y^2$$

имеет сложный профиль при фиксированном значении координаты y, который немонотонный и может иметь до двух нулевых значений.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В статье приведено и исследовано новое точное решение уравнений Навье-Стокса для установившегося течения вязкой несжимаемой жидкости. Это решение описывает течение жидкости в тонком слое, которое можно трактовать как крупномасштабное течение вертикальной завихренности жидкости без предварительного вращения. Исследована структура полученного решения. Показано, что для изобарических течений и гидростатического распределения давления поле скоростей расслаивается на две зоны (одна застойная точка, сопровождающаяся противотечением). При наличии градиентов давления поле скоростей может стратифицироваться на три зоны, что означает существование двух нулей у удельной кинетической энергии.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Ershkov S. V, Prosviryakov E. Yu, Burmasheva N. V, Christianto V. Towards understanding the algorithms for solving the Navier-Stokes equations // Fluid Dynamics Research, 2021, vol. 53, no. 4, 044501. https://doi.org/10.1088/1873-7005/ac10f0

2. Aristov S. N., Knyazev D. V., Polyanin A. D. Exact solutions of the Navier–Stokes equations with the linear dependence of velocity components on two space variables // Theoretical Foundations of Chemical Engineering, 2009, vol. 43, no. 5, pp. 642-662. https://doi.org/10.1134/S0040579509050066

3. Drazin P. G., Riley N. The Navier-Stokes Equations: A classification of flows and exact solutions. Cambridge: Cambridge Univ. Press, 2006, 196 p.

4. Пухначев В. В. Симметрии в уравнениях Навье-Стокса // Успехи механики. 2006. Т. 4, № 1. С. 6-76.

5. Броман Г. И., Руденко О. В. Затопленная струя Ландау: точные решения, их смысл и приложения // Успехи физических наук. 2010. Т. 180, № 1. С. 97-104.

6. Shtern V. Counterflows. Paradoxical Fluid Mechanics Phenomena. Cambridge: Cambridge University Press, 2012. 470 p. https://doi.org/10.1017/CBO9781139226516

7. Shtern V. Cellular Flows: Topological Metamorphoses in Fluid Mechanics. Cambridge: Cambridge University Press, 2018. 574 p. http://dx.doi.org/10.1017/9781108290579

8. Аристов С. Н., Просвиряков Е. Ю. Неоднородные течения Куэтта // Нелинейная динамика. 2014. Т. 10, № 2. С. 177-182.

9. Аристов С. Н., Просвиряков Е. Ю. Крупномасштабные течения завихренной вязкой несжимаемой жидкости // Известия высших учебных заведений. Авиационная техника. 2015. № 4. С. 50-54.

10. Бурмашева Н. В., Просвиряков Е. Ю. Точное решение уравнений Навье-Стокса, описывающее пространственно неоднородные течения вращающейся жидкости // Труды Института математики и механики УрО РАН. 2020. Т. 26, № 2. С. 79-87. https://doi.org/10.21538/0134-4889-2020-26-2-79-87

11. Зубарев Н. М., Просвиряков Е.Ю. О точных решениях для слоистых трехмерных нестационарных изобарических течений вязкой несжимаемой жидкости // Прикладная механика и техническая физика. 2019. Т. 60, № 6(358). С. 65-71. https://doi.org/10.15372/PMTF20190607

12. Просвиряков Е. Ю. Новый класс точных решений уравнений Навье–Стокса со степенной зависимостью скоростей от двух пространственных координат // Теоретические основы химической технологии. 2019. Т. 53, № 1. С. 112-120. https://doi.org/10.1134/S0040357118060118

13. Prosviryakov E. Yu. Waves of pressure in viscous incompressible fluid // AIP Conference Proceedings, vol. 1915, Article no. 020006. https://doi.org/10.1063/1.5017318

14. Просвиряков Е. Ю., Спевак Л. Ф. Пространственно неоднородные слоистые течения вязкой несжимаемой жидкости // Теоретические основы химической технологии. 2018. Т. 52, № 5. С. 483-488. https://doi.org/10.1134/S0040357118050111

15. Просвиряков Е. Ю. Слоистые градиентные стационарные течения вертикально завихренной вязкой несжимаемой жидкости // CEUR Workshop Proceedings. 2016. Т. 1825. С. 164-172. http://ceur-ws.org/Vol-1825/p21.pdf

16. Алексеенко Е. А., Горшков А. В., Просвиряков Е. Ю. Слоистая конвекция Марангони при учете теплообмена по закону Ньютона-Рихмана. Сообщение 1. Исследование поля скоростей // Химическая физика и мезоскопия. 2018. Т. 20, № 1. С. 15-27.

17. Аристов С. Н., Просвиряков Е. Ю. Новый класс точных решений трехмерных уравнений термодиффузии // Теоретические основы химической технологии. 2016. Т. 50, № 3. С. 294-301. https://doi.org/10.7868/S0040357116030027

18. Lin C. C. Note on a class of exact solutions in magnetohydrodynamics // Archive for Rational Mechanics and Analysis, 1957, vol. 1, pp. 391-395. https://doi.org/10.1007/BF00298016

19. Сидоров А. Ф. О двух классах решений уравнений механики жидкости и газа и их связи с теорией бегущих волн // Прикладная механика и техническая физика. 1989. № 2. С. 34-40.

20. Аристов С. Н. Вихревые течения в тонких слоях жидкости. Автореф. дис… докт. физ.-мат. наук. Владивосток, 1990.

REFERENCES

1. Ershkov S. V, Prosviryakov E. Yu, Burmasheva N. V, Christianto V. Towards understanding the algorithms for solving the Navier-Stokes equations. *Fluid Dynamics Research*, 2021, vol. 53, no. 4, 044501. https://doi.org/10.1088/1873-7005/ac10f0

2. Aristov S. N., Knyazev D. V., Polyanin A. D. Exact solutions of the Navier–Stokes equations with the linear dependence of velocity components on two space variables. *Theoretical Foundations of Chemical Engineering*, 2009, vol. 43, no. 5, pp. 642-662. https://doi.org/10.1134/S0040579509050066

3. Drazin P. G., Riley N. *The Navier-Stokes Equations: A classification of flows and exact solutions*. Cambridge: Cambridge Univ. Press, 2006, 196 p.

4. Pukhnachev V. V. Simmetrii v uravneniyakh Nav'e-Stoksa [Symmetries in Navier-Stokes equations]. *Uspekhi mekhaniki* [Achievements in Mechanics], 2006, vol. 4, no. 1, pp. 6-76. (In Russian).

5. Broman G. I., Rudenko O. V. Submerged Landau jet: exact solutions, their meaning and application, *Physics-Uspekhi*, 2010, vol. 53, no. 1, pp. 91-98. (In Russian). https://doi.org/10.3367/UFNe.0180.201001f.0097

6. Shtern V. *Counterflows. Paradoxical Fluid Mechanics Phenomena*. Cambridge: Cambridge University Press, 2012. 470 p. https://doi.org/10.1017/CBO9781139226516

7. Shtern V. *Cellular Flows: Topological Metamorphoses in Fluid Mechanics*. Cambridge: Cambridge University Press, 2018. 574 p. http://dx.doi.org/10.1017/9781108290579

8. Aristov S. N., Prosviryakov E. Yu. Neodnorodnye techeniya Kuetta [Inhomogeneous Couette flow]. *Nelineynaya dinamika* [Russian Journal of Nonlinear Dynamics]. 2014, vol. 10, no. 2, pp. 177-182. (In Russian).

9. Aristov S. N., Prosviryakov E. Y. Large-scale flows of viscous incompressible vortical fluid. *Russian Aeronautics*, 2015, vol. 58, no. 4, pp. 413-418. https://doi.org/10.3103/S1068799815040091

10. Burmasheva N. V., Prosviryakov E. Yu. Tochnoe reshenie uravneniy Nav'e-Stoksa, opisyvayushchee prostranstvenno neodnorodnye techeniya vrashchayushcheysya zhidkosti [Exact solution of Navier-Stokes equations describing spatially inhomogeneous flows of a rotating fluid]. *Trudy Instituta matematiki i mekhaniki UrO RAN* [Proceedings of the Institute of Mathematics and Mechanics Ural Branch of RAS], 2020. vol. 26, no. 2, pp. 79-87. (In Russian). https://doi.org/10.21538/0134-4889-2020-26-2-79-87

11. Zubarev N. M., Prosviryakov E. Yu. Exact Solutions for the Layered Three-Dimensional Nonstationary Isobaric Flows of Viscous Incompressible Fluid. *Journal of Applied Mechanics and Technical Physics*, 2019, vol. 60, no. 6, pp. 1031-1037. (In Russian). https://doi.org/10.1134/S0021894419060075

12. Prosviryakov E. Yu. New Class of Exact Solutions of Navier-Stokes Equations with Exponential Dependence of Velocity on Two Spatial Coordinates. *Theoretical Foundations of Chemical Engineering*, 2019, vol. 53, no. 1, pp. 107-114. (In Russian). https://doi.org/10.1134/S0040579518060088

13. Prosviryakov E. Yu. Waves of pressure in viscous incompressible fluid. *AIP Conference Proceedings*, vol. 1915, Article no. 020006. https://doi.org/10.1063/1.5017318

14. Prosviryakov E. Yu., Spevak L. F. Layered Three-Dimensional NonUniform Viscous Incompressible Flows. *Theoretical Foundations of Chemical Engineering*, 2018, vol. 52, no. 5, pp. 765-770. (In Russian). https://doi.org/10.1134/S0040579518050391

15. Prosviryakov E. Y. Layered gradient stationary flow vertically swirling viscous incompressible fluid. *CEUR Workshop Proceedings*, 2016, vol. 1825, pp. 164-172. (In Russian). http://ceur-ws.org/Vol-1825/p21.pdf

16. Alekseenko E. A., Gorshkov A. V., Prosviryakov E. Yu. Sloistaya konvektsiya Marangoni pri uchete teploobmena po zakonu N'yutona-Rikhmana. Soobshchenie 1. Issledovanie polya skorostey [Layered Marangoni Convection during Heat Transfer According to the Newton’s Law of Cooling. Part 1. Investigation of the Velocity Field]. *Khimicheskaya fizika i mezoskopiya* [Chemical Physics and Mesoscopy], 2018, vol. 20, no. 1, pp. 15-27. (In Russian).

17. Aristov S. N., Prosviryakov E. Y. A new class of exact solutions for three-dimensional thermal diffusion equations. *Theoretical Foundations of Chemical Engineering*, 2016, vol. 50, no. 3, pp. 286-293. (In Russian). https://doi.org/10.1134/S0040579516030027

18. Lin C. C. Note on a class of exact solutions in magnetohydrodynamics. *Archive for Rational Mechanics and Analysis*, 1957, vol. 1, pp. 391-395. https://doi.org/10.1007/BF00298016

19. Sidorov A. F. Two classes of solutions of the fluid and gas mechanics equations and their connection to traveling wave theory. *Journal of Applied Mechanics and Technical Physics*, 1989, vol. 30, no. 2, pp. 197-203. (In Russian). https://doi.org/10.1007/BF00852164

20. Aristov S. N. *Vikhrevye techeniya v tonkikh sloyakh zhidkosti* [Eddy currents in thin liquidlayers]. Abstract dis. Dokt. Fiz.-Mat. nauk. Vladivostok, 1990. (In Russian).

Поступила 16.11.2021; после доработки 07.12.2021; принята к опубликованию 08.12.2021
Received 16 November 2021; received in revised form 07 December 2021; accepted 08 December 2021

Горулева Лариса Сергеевна, *научный сотрудник, ИМАШ УрО РАН, Екатеринбург, Российская Федерация*

Larisa S. Goruleva, *Researcher, Institute of Engineering Science UB RAS, Ekaterinburg, Russian Federation*

Просвиряков Евгений Юрьевич, *доктор физико-математических наук, заведующий сектором, главный научный сотрудник, ИМАШ УрО РАН, Екатеринбург, Российская Федерация, e-mail: evgen_pros@mail.ru*

Evgenii Yu. Prosviryakov, *Dr. Sci. (Phys.-Math.), Head of Department, Chief Researcher, Institute of Engineering Science UB RAS, Ekaterinburg, Russian Federation, e-mail: evgen_pros@mail.ru*