

СПЕКТРАЛЬНЫЙ АНАЛИЗ РАСПРЕДЕЛЕНИЯ ПАРАМЕТРОВ ПОТОКОВ, ПРОТЕКАЮЩИХ СКВОЗЬ СУЖАЮЩИЕСЯ КОНИЧЕСКИЕ СОПЛА

КАРСКАНОВ С. А.

Удмуртский федеральный исследовательский центр Уральского отделения РАН,
426067, г. Ижевск, ул. Т. Барамзиной, 34

АННОТАЦИЯ. Рассчитывается течение в конических соплах с различными углами сужения. Счет ведется на основе прямого численного моделирования на многопроцессорной вычислительной системе. Интегрирование уравнений гидромеханики осуществляется с помощью алгоритмов высокого порядка аппроксимации. На основе дискретного преобразования Фурье строятся спектры частот, на которых происходит колебание давления в соплах с различным углом сужения. Выявлено, что в соплах с большим углом сужения амплитуда колебаний давления в одних и тех же точках уменьшается. Для каждого сопла можно выделить область частот, на которых происходят колебания.

КЛЮЧЕВЫЕ СЛОВА: прямое численное моделирование, сужающееся коническое сопло, вязкий поток, высокий порядок аппроксимации, дискретное преобразование Фурье.

ВВЕДЕНИЕ

В работе [1] проведены расчеты течения газа сквозь сужающиеся сопла, расположенные между двумя емкостями. Проведено параметрическое исследование потоков, протекающих сквозь сопла. Выявлено, что в соплах с большим углом сужения поток сильнее разгоняется, однако, возмущения, возникшие на входе, быстро гасятся.

Моделирование течений в работе [1] выполнено на основе метода DNS (прямого численного моделирования). Как известно, данный метод свободен от привлечения эмпирических констант и различных допущений и позволяет получить весь объем данных о течении в любой момент времени. Это дает возможность исследовать процесс течения газа во времени и строить энергетические спектры распределения параметров потока. Именно этому посвящена данная работа.

МАТЕМАТИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ

Уравнения Навье-Стокса записываются в безразмерном виде для потоков сжимаемого газа в осесимметричной постановке [2]:

$$\frac{\partial \mathbf{W}}{\partial t} + \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial x} + \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial r} + \frac{\mathbf{D}}{r} = 0,$$

где

$$\mathbf{W} = \begin{pmatrix} \rho \\ \rho u_x \\ \rho u_r \\ \rho E \end{pmatrix},$$

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} \rho u_x \\ \rho u_x^2 + \frac{p}{kM^2} - \tau_{xx} \\ \rho u_x u_r - \tau_{rx} \\ u_x \left(\rho E + \frac{p}{kM^2} \right) + q_x - u_x \tau_{xx} - u_r \tau_{rx} \end{pmatrix},$$

$$\mathbf{B} = \begin{pmatrix} \rho u_r \\ \rho u_x u_r - \tau_{xr} \\ \rho u_r^2 + \frac{p}{kM^2} - \tau_{rr} \\ u_r \left(\rho E + \frac{p}{kM^2} \right) + q_r - u_x \tau_{xr} - u_r \tau_{rr} \end{pmatrix},$$

$$\mathbf{D} = \begin{pmatrix} \rho u_r \\ \rho u_x u_r - \tau_{xr} \\ \rho u_r^2 - \tau_{rr} + \tau_{\theta\theta} \\ u_r \left(\rho E + \frac{p}{kM^2} \right) + q_r - u_x \tau_{xr} - u_r \tau_{rr} \end{pmatrix},$$

$$E = \frac{u_x^2 + u_r^2}{2} + \frac{1}{k(k-1)M^2} \frac{p}{\rho},$$

$$\tau_{xx} = \frac{2}{\text{Re}} \frac{\partial u_x}{\partial x} - \frac{2}{3\text{Re}} \nabla \cdot \mathbf{u},$$

$$\tau_{rx} = \tau_{xr} = \frac{1}{\text{Re}} \left(\frac{\partial u_r}{\partial x} + \frac{\partial u_x}{\partial r} \right),$$

$$\tau_{rr} = \frac{2}{\text{Re}} \frac{\partial u_r}{\partial r} - \frac{2}{3\text{Re}} \nabla \cdot \mathbf{u},$$

$$\tau_{\theta\theta} = \frac{2}{\text{Re}} \frac{u_r}{r} - \frac{2}{3\text{Re}} \nabla \cdot \mathbf{u},$$

$$q_x = -\frac{1}{(k-1)\text{Pr}M^2} \frac{\partial T}{\partial x},$$

$$q_r = -\frac{1}{(k-1)\text{Pr}M^2} \frac{\partial T}{\partial r},$$

$$\nabla \cdot \mathbf{u} = \frac{\partial u_x}{\partial x} + \frac{\partial u_r}{\partial r} + \frac{u_r}{r}.$$

Здесь x , r , t – безразмерные цилиндрические координаты и время. Радиус сопла на входе сопла выбирался в качестве масштаба для линейных величин. В итоге, в безразмерном виде входной радиус равнялся единице. Так как скорость течения в начальный момент неизвестна, то для скоростей масштабом выбиралась скорость звука. Для давления и плотности – величины давления и плотности окружающей среды. В качестве окружающей среды выступал воздух, давление в окружающей среде равнялось одной атмосфере.

Область интегрирования представлена на рис. 1. Сопло соединяет два резервуара. Давление на границе правого резервуара считаем равным давлению окружающей среды, то есть равным единице. Давление на границе в левом резервуаре выше, чем в правом (равно 1.05), за счет этого возникает возмущенное течение в сопле. Температура на границе левого резервуара так же, как и давление, задается постоянной величиной ($T_{in} = 293K$).

Параметры потока на правой границе, за исключением давления, определялись с помощью условия «сноса» (равенство нулю первой производной на границе).

На твердых поверхностях задавались условие прилипания и непротекания, кроме того, поверхности считались адиабатическими.

На оси симметрии, совпадающей с координатной осью r , задавались условия симметрии.

Счет велся на равномерной сетке. Сетка состояла из $11200 \times 720 = 8\,064\,000$ узлов. Вычислительный процесс распараллеливался с помощью технологии MPI. Расчеты выполнены на суперкомпьютере «Уран» (ИММ УрО РАН, г. Екатеринбург).

Число Рейнольдса, посчитанное по скорости звука (масштабу для скорости), равнялось $Re_c = 2.06 \cdot 10^6$.

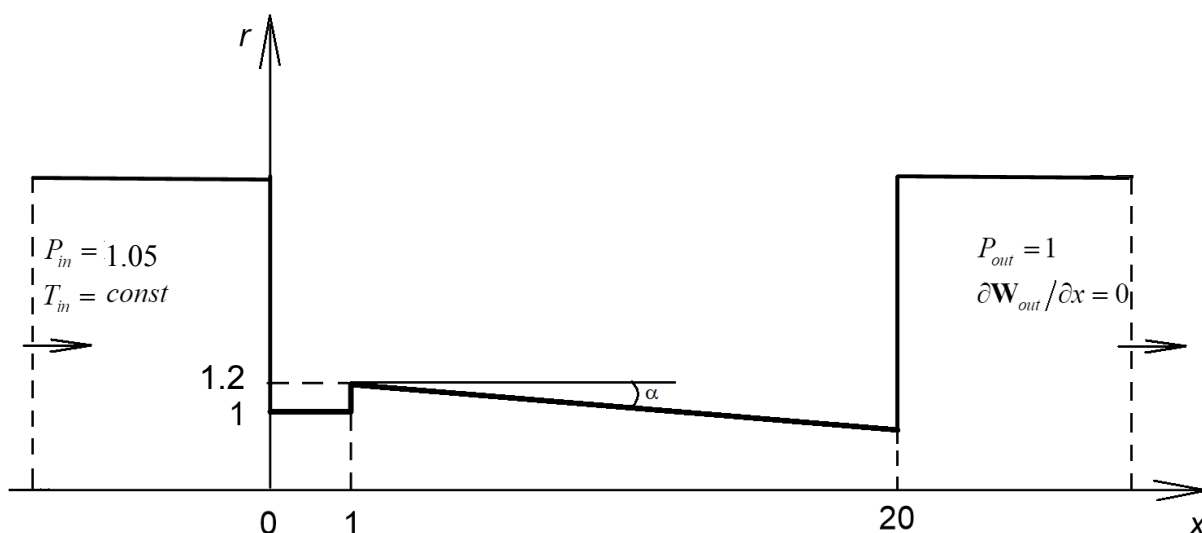


Рис. 1. Область интегрирования

Схема WENO пятого порядка точности использовалась для аппроксимации частных производных по пространству [3].

Поток в точке $(i + 1/2)$ записывался в виде суперпозиции потоков

$$f_{i+1/2} = \sum_{v=1}^3 \Omega^{(v)} f_{i+1/2}^{(v)},$$

где $\Omega^{(1)} = 1/10$, $\Omega^{(2)} = 6/10$, $\Omega^{(3)} = 3/10$ являются весовыми коэффициентами, а f – обобщенная переменная, соответствующая уравнениям гидромеханики, компоненты которой вычисляются через значения в соседних узлах:

$$f_{i+1/2}^{(v)} = \begin{cases} f_{i+1/2}^{(1)} = \frac{11}{6} f_i - \frac{7}{6} f_{i-1} + \frac{2}{6} f_{i-2} \\ f_{i+1/2}^{(2)} = \frac{2}{6} f_{i+1} + \frac{5}{6} f_i - \frac{1}{6} f_{i-1} \\ f_{i+1/2}^{(3)} = -\frac{1}{6} f_{i+2} + \frac{5}{6} f_{i+1} + \frac{2}{6} f_i \end{cases}.$$

Схема WENO устанавливает веса линейной комбинации малыми для областей, содержащих разрыв и близкими к оптимальным весам для гладкого решения.

$$f_{i+1/2} = \sum_{v=1}^3 \omega^{(v)} f_{i+1/2}^{(v)},$$

$$\omega^{(v)} = \frac{\sigma^{(v)}}{\sigma^{(1)} + \sigma^{(2)} + \sigma^{(3)}},$$

$$\sigma^{(v)} = \frac{\Omega^{(v)}}{(\varepsilon + IS^{(v)})^p}.$$

Здесь $IS^{(v)}$ – индикаторы гладкости [4], $p=2$, а ε – малая величина, предотвращающая деление на 0, принималась равной 10^{-6} .

Для интегрирования уравнений по времени была использована TVD-схема Рунге-Кутты второго порядка точности. Схема выглядит следующим образом [5]:

$$\mathbf{W}^{(1)} = \mathbf{W}^n + \Delta t \mathbf{L}(\mathbf{W}^n),$$

$$\mathbf{W}^{(n+1)} = \frac{1}{2} \mathbf{W}^n + \frac{1}{2} \mathbf{W}^{(1)} + \frac{1}{2} \Delta t \mathbf{L}(\mathbf{W}^{(1)}),$$

где \mathbf{L} – конечно-разностная аппроксимация.

РЕЗУЛЬТАТЫ И ИХ ОБСУЖДЕНИЕ

На основе прямого численного моделирования рассчитаны течения в соплах с разным углом сужения. Угол сужения менялся от нуля до трех градусов. Было проведено шесть серий опытов. Для каждого варианта записывались данные параметров течения через определенное количество временных шагов. Таким образом, имеем дискретные ряды параметров, изменяющихся во времени. Далее будем рассматривать временные ряды изменения давления.

Преобразование Фурье сопоставляет непрерывной во времени, бесконечной функции другую, непрерывную по частоте, бесконечную функцию — спектр. Так как мы имеем дискретную, а не непрерывную по времени функцию, то будем использовать дискретное преобразование Фурье (ДПФ) с получением дискретного спектра.

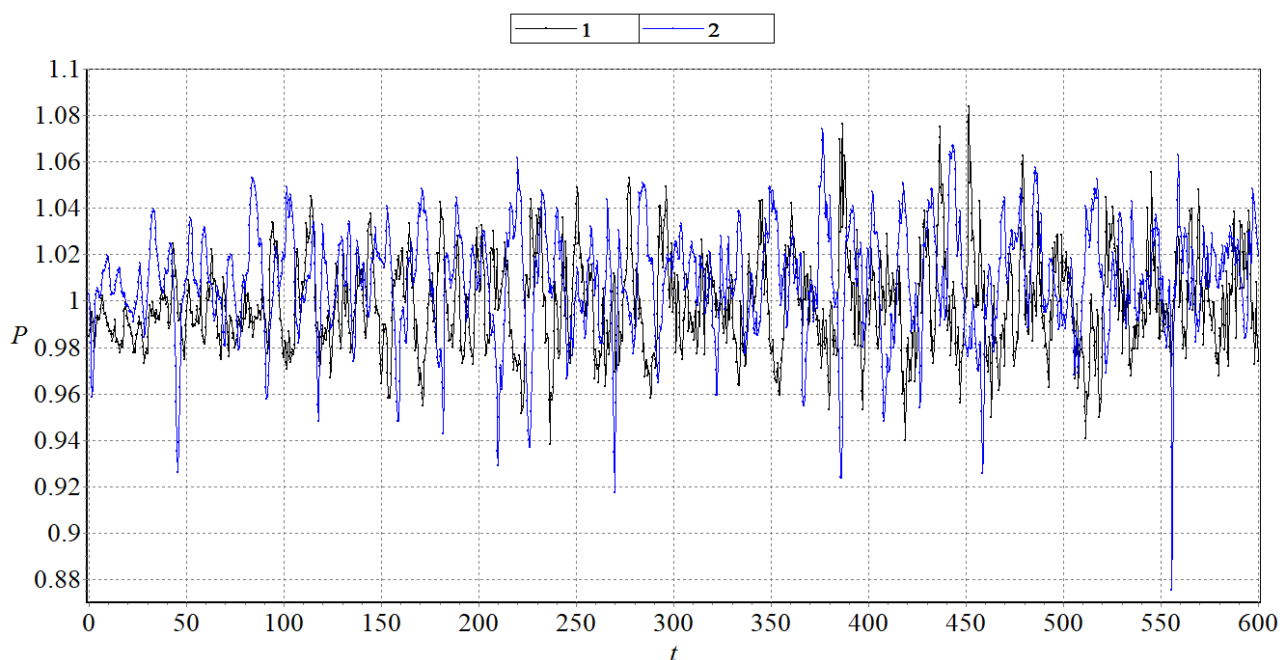
Выражения для прямого и обратного ДПФ запишем в виде:

$$S(k) = \sum_{n=0}^{N-1} s(n) \exp\left(-j \frac{2\pi}{N} nk\right), k = 0 \dots$$

$$s(n) = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} S(k) \exp\left(j \frac{2\pi}{N} nk\right), n = 0 \dots$$

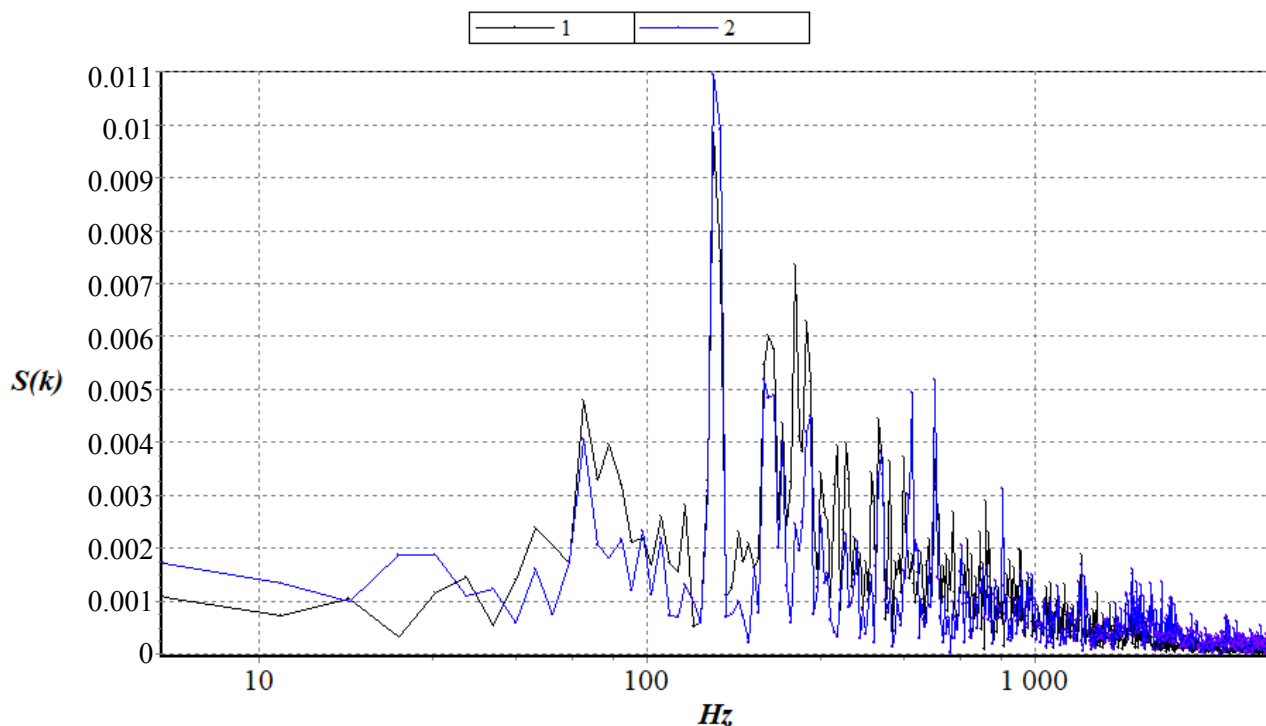
Таким образом, ДПФ ставит в соответствие N отсчетам дискретного сигнала, N отсчетов дискретного спектра.

Рассмотрим далее изменение давления во времени. На рис. 2 представлена зависимость безразмерного давления от безразмерного времени в сопле с $\alpha=0$ в точках (1; 0) и (10; 0.5). Видим, что амплитуда колебаний давления в различных точках сопла примерно одинакова.



**Рис. 2. Изменение давления во времени в цилиндрическом сопле:
1 – точка (1; 0), 2 – точка (10; 0.5)**

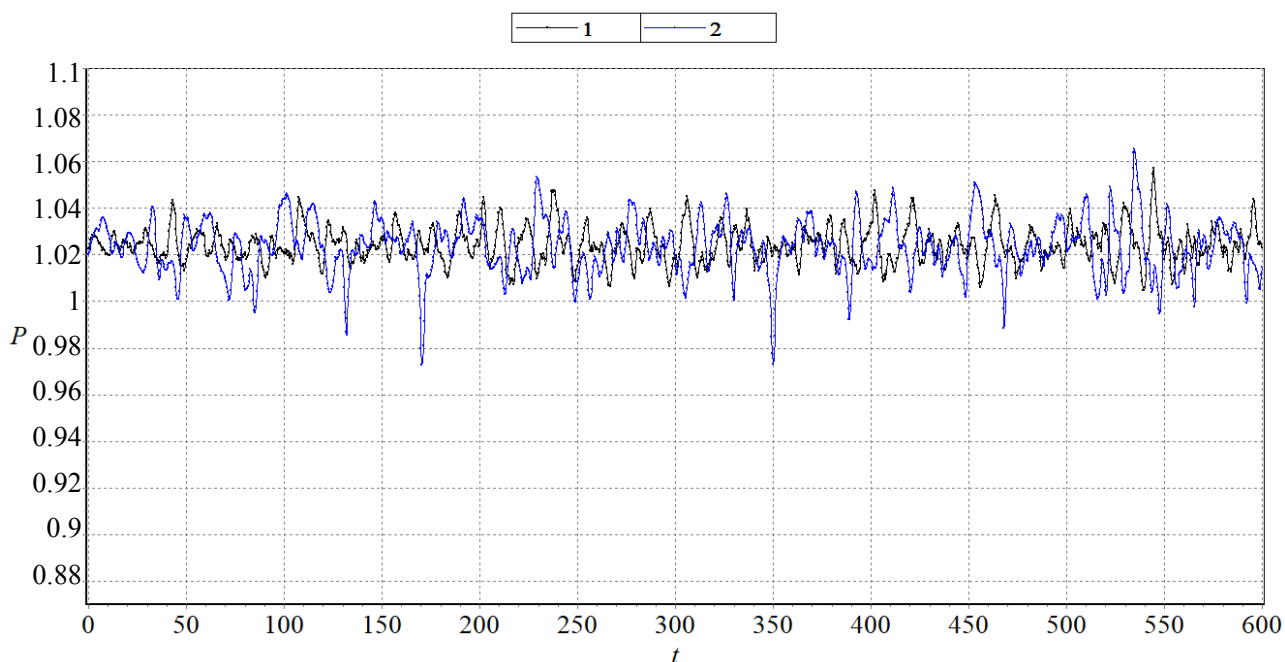
Далее, построим спектры распределения частот, на которых происходят колебания давления. Для двух точек в цилиндрическом сопле спектры представлены на рис. 3.



**Рис. 3. Спектры частот колебаний давления в цилиндрическом сопле:
1 – точка (1; 0), 2 – точка (10; 0.5)**

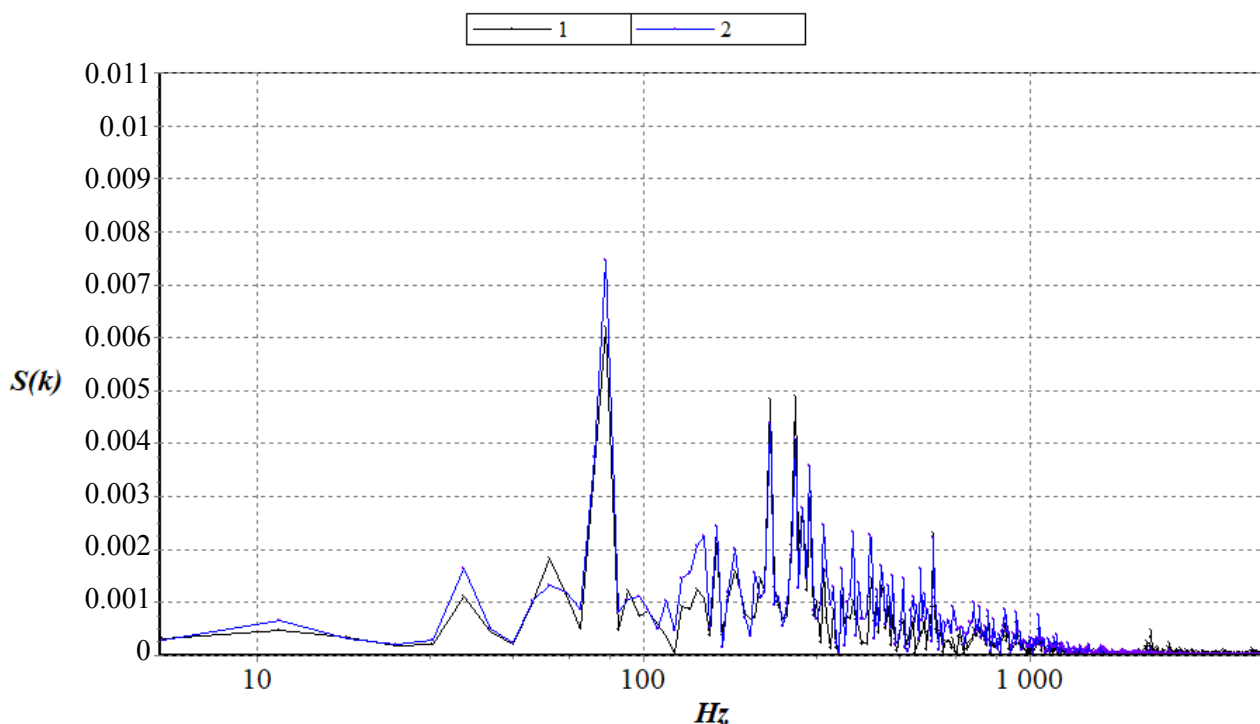
Видим, что для обеих точек выделяется одна и та же частота колебаний близкая к значению в 150 Гц.

Далее рассмотрим сопло с углом сужения $\alpha = 1^\circ$. Также рассмотрим точки (1; 0) и (10; 0.5). Изменения давления в точках для данного сопла показаны на рис. 4.



**Рис. 4. Изменение давления во времени в сопле с углом сужения 1 градус:
1 – точка (1; 0), 2 – точка (10; 0.5)**

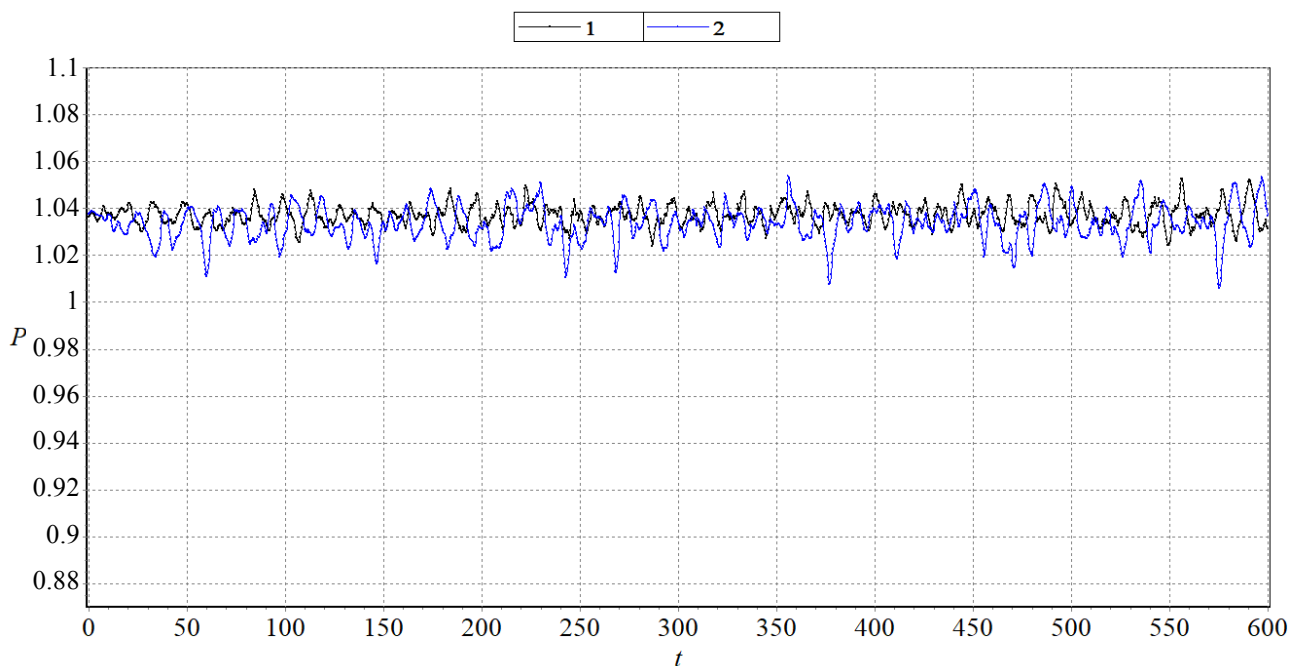
Амплитуда колебаний давления в точках заметно меньше, чем в сопле с углом сужения ноль градусов. Кроме того, если сравнивать колебания в точках, то можно заметить, что отклонений от среднего уровня в точке (10; 0.5) больше. Далее, рассмотрим спектры частот колебаний в точках (рис. 5).



**Рис. 5. Спектры частот колебаний давления в сопле с углом сужения 1 градус:
1 – точка (1; 0), 2 – точка (10; 0.5)**

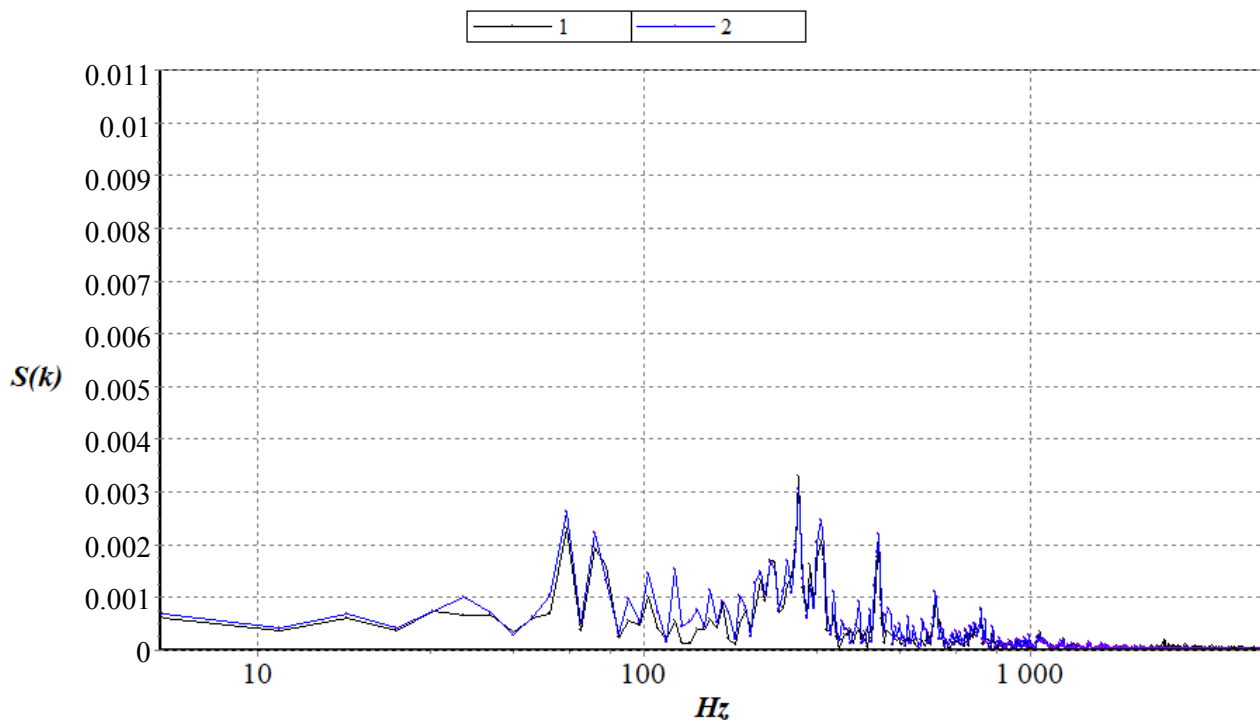
Как и для сопла с нулевым углом сужения на графике спектра выделяется единственный «пик». В данном случае основная частота колебаний находится в районе 80 Гц.

Далее, рассмотрим канал с углом сужения полтора градуса. Колебания давления в точках (1; 0) и (10; 0.5) показано на рис. 6.



**Рис. 6. Изменение давления во времени в сопле с углом сужения 1.5 градуса:
1 – точка (1; 0), 2 – точка (10; 0.5)**

Амплитуда колебаний еще уменьшилась. Как и прежде отклонения от среднего значения в точке (10; 0.5) несколько больше. Спектры для сопла с углом сужения 1.5 градуса показаны на рис. 7.



**Рис. 7. Спектры частот колебаний давления в сопле с углом сужения 1.5 градуса:
1 – точка (1; 0), 2 – точка (10; 0.5)**

Выделяется частота колебаний в области 63 Гц, однако, ее амплитуда уже не самая большая. Колебания с частотой примерно 500 Гц происходят с большей амплитудой.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

На основе прямого численного моделирования рассчитано течение газа в соплах, расположенных между двумя емкостями.

Накоплена информация об изменении параметров течения во времени.

На основе дискретного преобразования Фурье построены спектры частот, на которых происходит колебание давления в соплах с различным углом сужения.

Выявлено, что в соплах с большим углом сужения амплитуда колебаний давления в одних и тех же точках уменьшается.

Для каждого сопла можно выделить основную частоту, на которой происходят колебания.

Значения $S(k)$ с увеличением угла сужения уменьшаются по величине.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Карсканов С. А. Параметрическое исследование потоков газа, протекающих сквозь сужающиеся конические сопла // Химическая физика и мезоскопия. 2020. Т. 22, № 3. С. 261-268.
2. Липанов А. М. Теоретическая гидромеханика ньютоновских сред. М.: Наука, 2011. 551 с.
3. Jiang G. S., Shu C. W. Efficient Implementation of Weighted ENO Schemes // Journal of Computational Physics, 1996, vol. 126, no. 1, pp. 202-228.
4. Shu C. W. High Order ENO and WENO Schemes for Computational Fluid Dynamics // High-Order Methods for Computational Physics, Lecture Notes in Computational Science and Engineering, 1999, vol. 9, pp. 439-582.
5. Gottlieb S., Shu C. W. Total Variation Diminishing Runge-Kutta Schemes // Mathematics of Computation, 1998, vol. 67, pp. 73-85.

Spectral Analysis of the Parameter Distribution of Gas Flow Through Tapered Conic Nozzles

Karskanov S. A.

Udmurt Federal Research Center, Ural Branch of the RAS, Izhevsk, Russia

SUMMARY. Calculations of the gas flow through tapered conic nozzles located between two containers with gas are carried out. A computational algorithm based on high-order WENO-schemes for spatial derivatives and TDV Runge-Kutta scheme for time integration. The counting is carried out on a multiprocessor system using the procedure for parallelizing the computational process. The discrete Fourier transform is used to construct the frequency spectra at which the pressure fluctuates in nozzles with different constriction angles. It was found that in nozzles with a large angle of constriction, the amplitude of pressure fluctuations at the same points decreases. For each nozzle, it is possible to select the fundamental frequency at which the oscillations occur.

KEYWORDS: direct numerical simulations, tapered conic nozzle, viscous flow, high-order approximation, discrete Fourier transform.

REFERENCES

1. Karskanov S. A. Parametricheskoe issledovanie potokov gaza, protekayushih skvoz suzhayushiesya konicheskie sopla [Parametrical Study of Gas Flow Through Tapered Conic Nozzles]. *Khimicheskaya fizika i mezoskopiya* [Chemical Physics and Mesoscopy], 2020, vol. 22, no. 3, pp. 261-268. <https://doi.org/10.15350/17270529.2020.3.25>
2. Lipanov A. M. *Teoreticheskaya gidromekhanika n'yutonovskikh sred* [Theoretical hydromechanics of Newtonian fluids]. Moscow: Nauka Publ., 2011. 551 p.
3. Jiang G. S., Shu C. W. Efficient Implementation of Weighted ENO Schemes. *Journal of Computational Physics*, 1996, vol. 126, no. 1, pp. 202-228. <https://doi.org/10.1006/jcph.1996.0130>
4. Shu C.W. High Order ENO and WENO Schemes for Computational Fluid Dynamics. *High-Order Methods for Computational Physics, Lecture Notes in Computational Science and Engineering*, 1999, vol. 9, pp. 439-582. https://doi.org/10.1007/978-3-662-03882-6_5
5. Gottlieb S., Shu C. W. Total Variation Diminishing Runge-Kutta Schemes. *Mathematics of Computation*, 1998, vol. 67, pp. 73-85. <https://doi.org/10.1090/S0025-5718-98-00913-2>

Карсканов Сергей Андреевич, кандидат физико-математических наук, старший научный сотрудник, УдмФИЦ УрО РАН, e-mail: ser@udman.ru