

## ПАРАМЕТРИЧЕСКОЕ ИССЛЕДОВАНИЕ ПОТОКОВ ГАЗА, ПРОТЕКАЮЩИХ СКВОЗЬ СУЖАЮЩИЕСЯ КОНИЧЕСКИЕ СОПЛА

КАРСКАНОВ С. А.

Удмуртский федеральный исследовательский центр Уральского отделения РАН,  
426067, г. Ижевск, ул. Т. Барамзиной, 34

**АННОТАЦИЯ.** На основе прямого численного моделирования рассчитывается течение в сужающихся соплах, соединяющих два газовых резервуара. Интегрирование уравнений гидромеханики осуществляется с помощью алгоритмов высокого порядка аппроксимации. Счет ведется на многопроцессорной системе с использованием процедуры распараллеливания вычислительного процесса. Угол сужения сопла является варьируемым параметром. Показано распределение гидромеханических параметров в соплах с разным углом сужения. Выявлено, что в соплах с высоким углом сужения поток сильнее разгоняется, однако возмущения, заданные на входе, быстро гасятся.

**КЛЮЧЕВЫЕ СЛОВА:** прямое численное моделирование, сужающееся коническое сопло, вязкий поток, высокий порядок аппроксимации.

### ВВЕДЕНИЕ

В работе [1] рассматривались потоки газа сквозь конические сужающиеся сопла при градусах сужения от нуля до полутора градусов. Было выявлено, что увеличение угла конуса приводит к снижению расхода. Кроме того, замечено, в сопле с большим углом сужения поток заметно ускоряется, а приграничные области занимают гораздо меньшее пространство, вытесняясь ядром потока. В цилиндрическом сопле с нулевым углом сужения ненулевая кинетическая энергия распределена по всей длине сопла. В сопле с углом сужения полутора градуса кинетическая энергия турбулентности имеет лишь редкие всплески, оставаясь близкой к нулю почти во всей области. Скорость потока в сопле уменьшается с увеличением угла конуса, и нет прямой связи между падением расхода и уменьшением площади критического сечения.

В данной работе на основе метода DNS (прямого численного моделирования), с использованием алгоритмов расчета производных высокого порядка точности, приводятся результаты и анализ моделирования течения газа сквозь конические сужающиеся сопла в более широком диапазоне изменения угла сужения. Кроме того, приводятся новые данные распределения параметров потоков в различных конусных соплах.

### МАТЕМАТИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ

Запишем уравнения гидромеханики (Навье-Стокса) для потоков вязкого сжимаемого газа в осесимметричной постановке [2]:

$$\frac{\partial W}{\partial t} + \frac{\partial A}{\partial x} + \frac{\partial B}{\partial r} + \frac{D}{r} = 0, \quad (1)$$

где

$$W = \begin{pmatrix} \rho \\ \rho u_x \\ \rho u_r \\ \rho E \end{pmatrix}, \quad A = \begin{pmatrix} \rho u_x \\ \rho u_x^2 + p - \tau_{xx} \\ \rho u_x u_r - \tau_{rx} \\ u_x(\rho E + p) + q_x - u_x \tau_{xx} - u_r \tau_{rx} \end{pmatrix},$$

$$B = \begin{pmatrix} \rho u_r \\ \rho u_x u_r - \tau_{xr} \\ \rho u_r^2 + p - \tau_{rr} \\ u_r(\rho E + p) + q_r - u_x \tau_{xr} - u_r \tau_{rr} \end{pmatrix}, \quad D = \begin{pmatrix} \rho u_r \\ \rho u_x u_r - \tau_{xr} \\ \rho u_r^2 - \tau_{rr} + \tau_{\theta\theta} \\ u_r(\rho E + p) + q_r - u_x \tau_{xr} - u_r \tau_{rr} \end{pmatrix},$$

$$\tau_{xx} = 2\mu \frac{\partial u_x}{\partial x} - \frac{2}{3} \mu \operatorname{div} \mathbf{u}, \quad \tau_{rx} = \tau_{xr} = \mu \left( \frac{\partial u_r}{\partial x} + \frac{\partial u_x}{\partial r} \right),$$

$$\tau_{rr} = 2\mu \frac{\partial u_r}{\partial r} - \frac{2}{3} \mu \operatorname{div} \mathbf{u}, \quad \tau_{\theta\theta} = 2\mu \frac{u_r}{r} - \frac{2}{3} \mu \operatorname{div} \mathbf{u},$$

$$q_x = -\lambda \frac{\partial T}{\partial x}, \quad q_r = -\lambda \frac{\partial T}{\partial r},$$

$$\operatorname{div} \mathbf{u} = \frac{\partial u_x}{\partial x} + \frac{\partial u_r}{\partial r} + \frac{u_r}{r}.$$

Энергия определяется из уравнения

$$E = \frac{u_x^2 + u_r^2}{2} + \frac{1}{k-1} \frac{P}{\rho}. \quad (2)$$

Здесь  $x, r, t$  – цилиндрические координаты и время. Коэффициенты молекулярной вязкости –  $\mu$  и теплопроводности –  $\lambda$  принимаются константными величинами.

Из уравнения (2) вычисляется давление, а температура в уравнениях гидромеханики вычисляется с помощью уравнения Клапейрона-Менделеева:

$$P / \rho = RT.$$

При ведении счета использовались безразмерные гидромеханические параметры (ГМП). Величина радиуса  $R$  сопла на входе выбиралась в качестве масштаба для линейных величин. Таким образом, радиус сопла равнялся единице. Для скоростей масштабом была скорость звука  $c$ , для давления и плотности – величины давления  $P_{out}$  и плотности  $\rho_{out}$  окружающей среды. В качестве окружающей среды выступал воздух, давление в окружающей среде равнялось одной атмосфере.

Вычислительная область показана на рис. 1. Сужающиеся сопло соединяет два резервуара. Интерес представляют процессы и параметры течения, формирующиеся именно в сопле. Тем не менее, течение в резервуарах также рассчитывалось, а граничные условия задавались на границах резервуаров.

На входе левого (входного) резервуара задавались постоянными давление ( $P_{in} = 1.05 \cdot P_{out}$ ) и температура ( $T_{in} = 293 \text{ K}$ ). На выходе правого (выходного) резервуара задавалось давление окружающей среды, остальные параметры определялись с помощью условия «сноса» (равенство нулю первой производной на границе). На твердых поверхностях задавались условия прилипания и непротекания, кроме того, поверхности считались адиабатическими. На оси симметрии, совпадающей с координатной осью  $r$ , задавались условия симметрии.

Расчеты проводились на равномерной расчетной сетке. В точке (1.0, 0.0) радиус сопла (до этого равномерный) резко увеличивался с 1.0 до 1.2. Это делалось для того, чтобы в потоке появились дополнительные возмущения. Далее сопло сужалось до точки  $x = 20$ .

Угол сужения обозначен как  $\alpha$ . Число типа Рейнольдса, посчитанное по скорости звука (масштабу для скорости), равнялось  $Re_c = 2.06 \cdot 10^6$ .

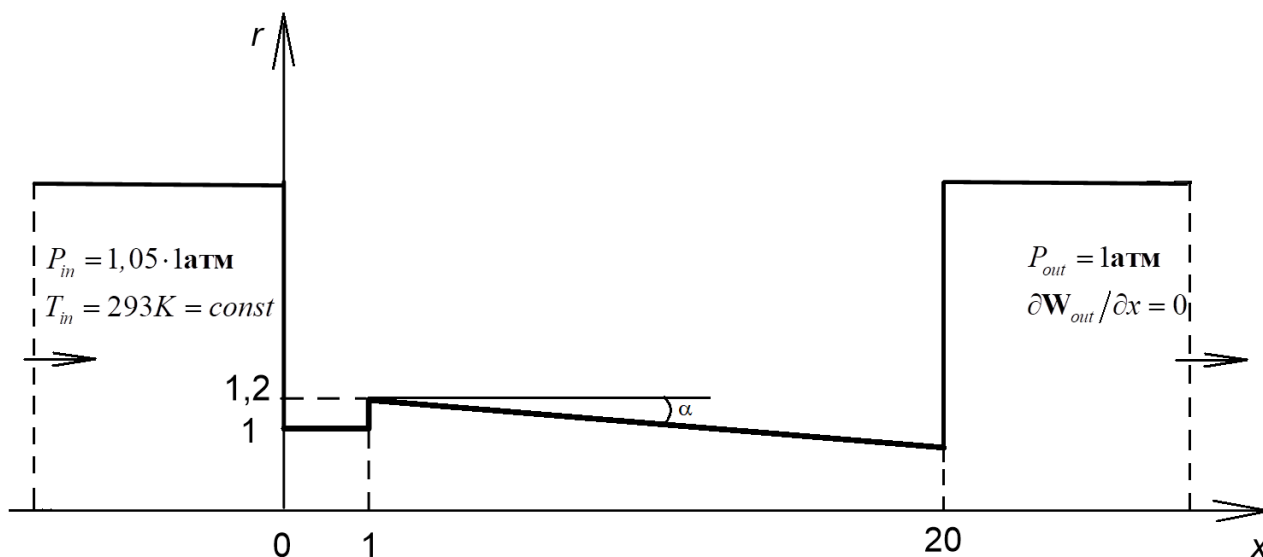


Рис. 1. Область интегрирования

Сетка состояла из  $11200 \times 720 = 8\,064\,000$  узлов. Данной мощности сетки вполне достаточно, чтобы моделировать минимальные вихревые возмущения и улавливать процессы, влияющие на характер течения. Вычислительный процесс распараллеливался с помощью технологии MPI. Расчеты выполнены на суперкомпьютере «Уран» (ИММ УрО РАН, г. Екатеринбург).

Для решения уравнений гидромеханики (1) использовались алгоритмы высокого порядка аппроксимации частных производных по пространству, основанных на методе WENO. Для расчета первых производных по пространству использовалась конечно-разностная WENO-схема пятого порядка [3]. Поток в точке  $(i+1/2)$  записывался в виде суперпозиции потоков

$$f_{i+1/2} = \sum_{v=1}^3 \Omega^{(v)} f_{i+1/2}^{(v)},$$

где  $\Omega^{(1)} = 1/10$ ,  $\Omega^{(2)} = 6/10$ ,  $\Omega^{(3)} = 3/10$  являются весовыми коэффициентами, а  $f$  – обобщенная переменная, соответствующая уравнениям (1–4), компоненты которой вычисляются через значения в соседних узлах:

$$f_{i+1/2}^{(v)} = \begin{cases} f_{i+1/2}^{(1)} = \frac{11}{6} f_i - \frac{7}{6} f_{i-1} + \frac{2}{6} f_{i-2} \\ f_{i+1/2}^{(2)} = \frac{2}{6} f_{i+1} + \frac{5}{6} f_i - \frac{1}{6} f_{i-1} \\ f_{i+1/2}^{(3)} = -\frac{1}{6} f_{i+2} + \frac{5}{6} f_{i+1} + \frac{2}{6} f_i \end{cases} .$$

Схема WENO устанавливает веса линейной комбинации малыми для областей, содержащих разрыв и близкими к оптимальным весам для гладкого решения.

$$f_{i+1/2} = \sum_{v=1}^3 \omega^{(v)} f_{i+1/2}^{(v)},$$

$$\omega^{(v)} = \frac{\sigma^{(v)}}{\sigma^{(1)} + \sigma^{(2)} + \sigma^{(3)}},$$

$$\sigma^{(v)} = \frac{\Omega^{(v)}}{(\varepsilon + IS^{(v)})^p}.$$

Здесь  $IS^{(v)}$  – индикаторы гладкости [4],  $p = 2$ , а  $\varepsilon$  – малая величина, предотвращающая деление на 0, принималась равной  $10^{-6}$ .

Для интегрирования уравнений по времени была использована TVD-схема Рунге-Кутты второго порядка точности. Схема выглядит следующим образом [5]:

$$\mathbf{W}^{(1)} = \mathbf{W}^n + \Delta t \mathbf{L}(\mathbf{W}^n),$$

$$\mathbf{W}^{(n+1)} = \frac{1}{2} \mathbf{W}^n + \frac{1}{2} \mathbf{W}^{(1)} + \frac{1}{2} \Delta t \mathbf{L}(\mathbf{W}^{(1)}),$$

где  $\mathbf{L}$  – конечно-разностная аппроксимация.

Для явной схемы значение шага для интегрирования по времени определяется с помощью предварительных тестовых вычислений, обеспечивающих стабильность счета. Требование к шагу по времени оказывается более строгим, чем у условия  $CFL$ , которое является необходимым, но не достаточным условием.

## РЕЗУЛЬТАТЫ И ИХ ОБСУЖДЕНИЕ

Проведено моделирование течения сквозь сужающиеся сопла, расположенные между двумя резервуарами. Угол сужения менялся от нуля до трех градусов. Было проведено шесть серий опытов.

На рис. 2 показано распределение осредненной продольной компоненты вектора скорости на оси симметрии сопла для различных углов сужения. На рис. 3 показано распределение продольной компоненты вектора скорости потока в безразмерный момент времени  $t^{\wedge} = 400$ , что соответствует осуществлению 2 млн. шагов по времени.

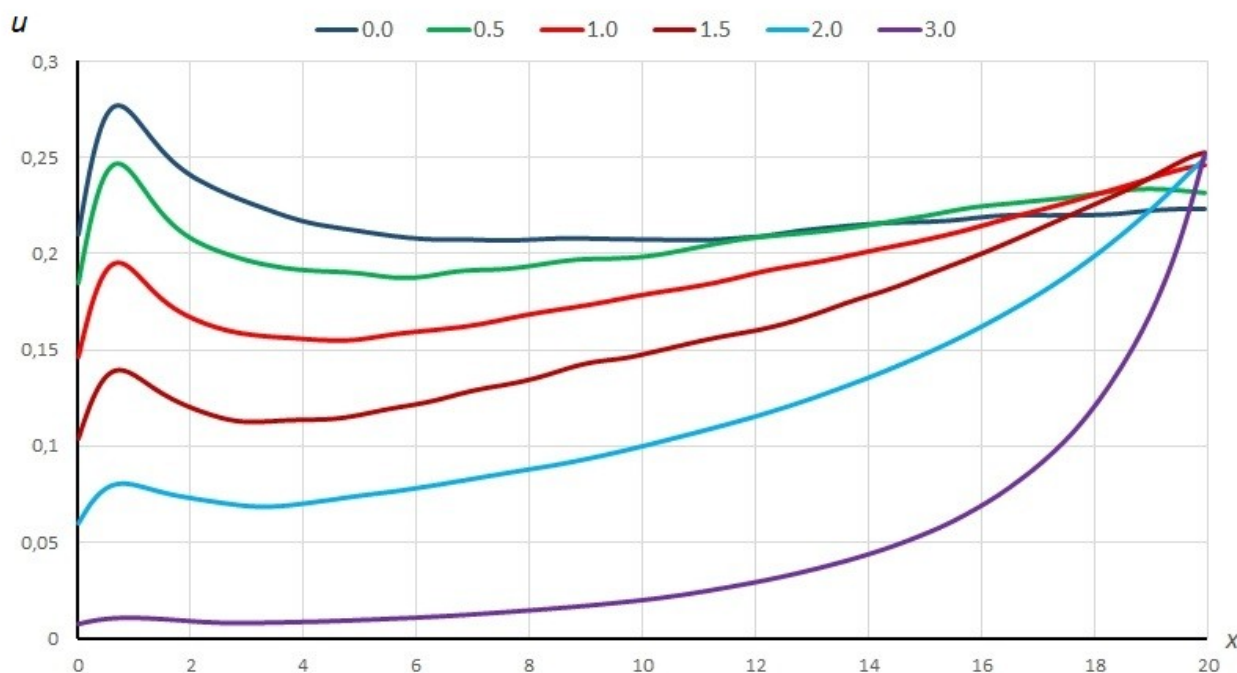
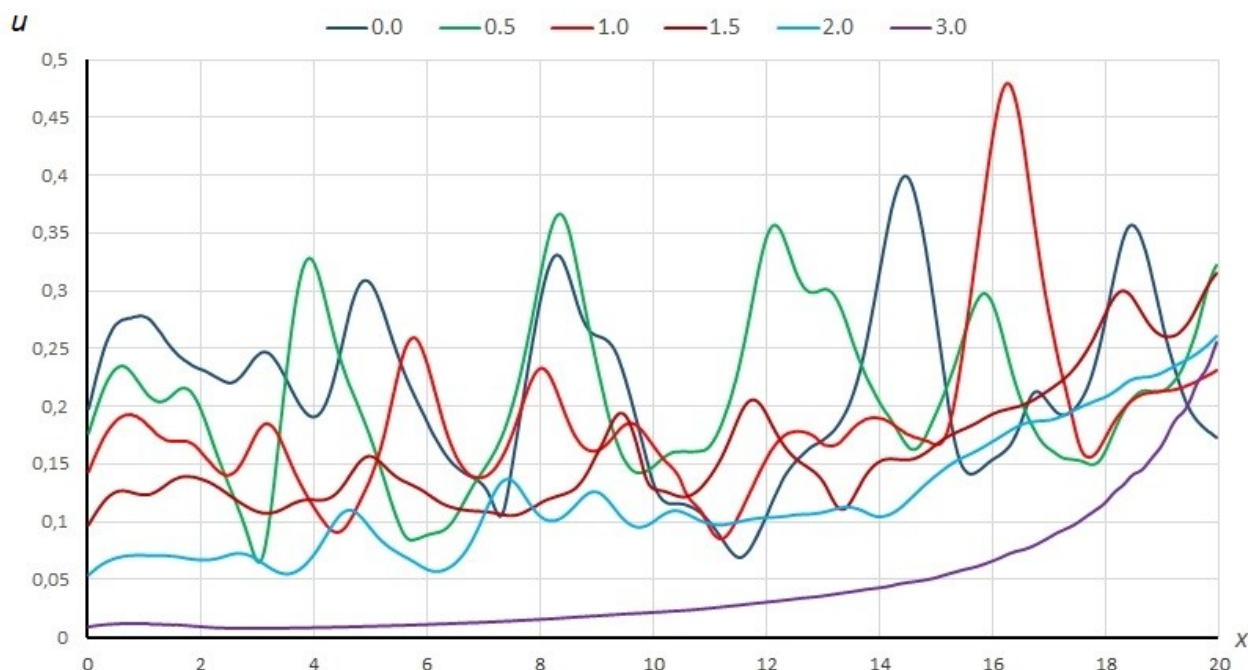


Рис. 2. Распределение по оси симметрии безразмерной осредненной продольной компоненты вектора скорости  $\langle u_x \rangle$  в соплах с различными углами сужения

Из данных рис. 2 видно, что с увеличением угла сужения газ все сильнее разгоняется от начального положения. Особенно четко разгон визуализируется при угле сужения 3 градуса. Однако начальная скорость газа мала и расход в итоге также сильно падает, хотя скорость на выходе даже несколько выше, чем в цилиндрическом канале.

На рис. 3 видим колебания компоненты вектора скорости вдоль оси симметрии канала. Хорошо заметно, что чем больше угол конусности, тем меньше амплитуда колебаний. При угле сужения 3 градуса скорость вдоль оси вообще перестает носить колебательный характер, прямая распределения компоненты скорости – гладкая функция.



**Рис. 3. Распределение по оси симметрии безразмерной мгновенной продольной компоненты вектора скорости  $u_x$  в соплах с различными углами сужения**

Картинки изменения плотности показаны на рис. 4 и рис. 5. На рис. 4 представлены теневые картины плотности осредненного течения. На рис. 5 показаны теневые картины мгновенных полей плотности в момент времени  $\hat{t} = 400$ .

Из данных рисунков видно, что вихревые возмущения, генерируемые на входе, при малых углах сужения сопла распространяются по всему потоку. В цилиндрическом сопле вихревые структуры наиболее крупные. С возрастанием угла конусности возмущения интенсивно гасятся, практически не проникая вглубь сопла. При больших углах  $\alpha$  вихревые возмущения вообще отсутствуют, диссипируя прямо в окрестности входа.

На рис. 6 представлены относительные среднеквадратичные отклонения давления

$$\sigma_p = \frac{\delta p}{\bar{p}} = \frac{\sqrt{\frac{1}{n} \sum_1^n (p^i - \bar{p})^2}}{\bar{p}}.$$

Видно, что при увеличении угла конусности уровень флуктуаций уменьшается, причем падают не только максимальные отклонения от нулевого значения, но и количество точек с ненулевым значением (суммарное отклонение).

Эти данные хорошо коррелируют с данными работы [1].

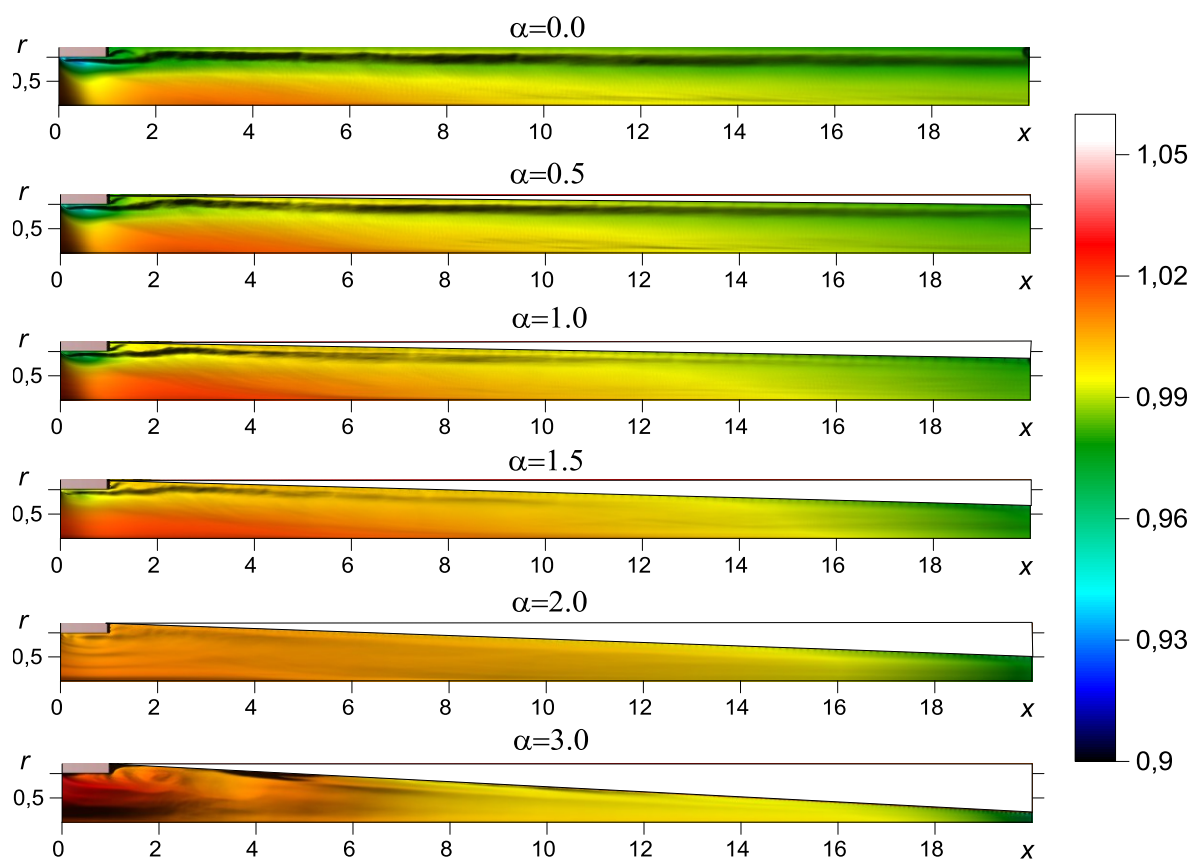


Рис. 4. Распределение осредненных полей плотности  $\langle \rho \rangle$  в соплах с различными углами сужения

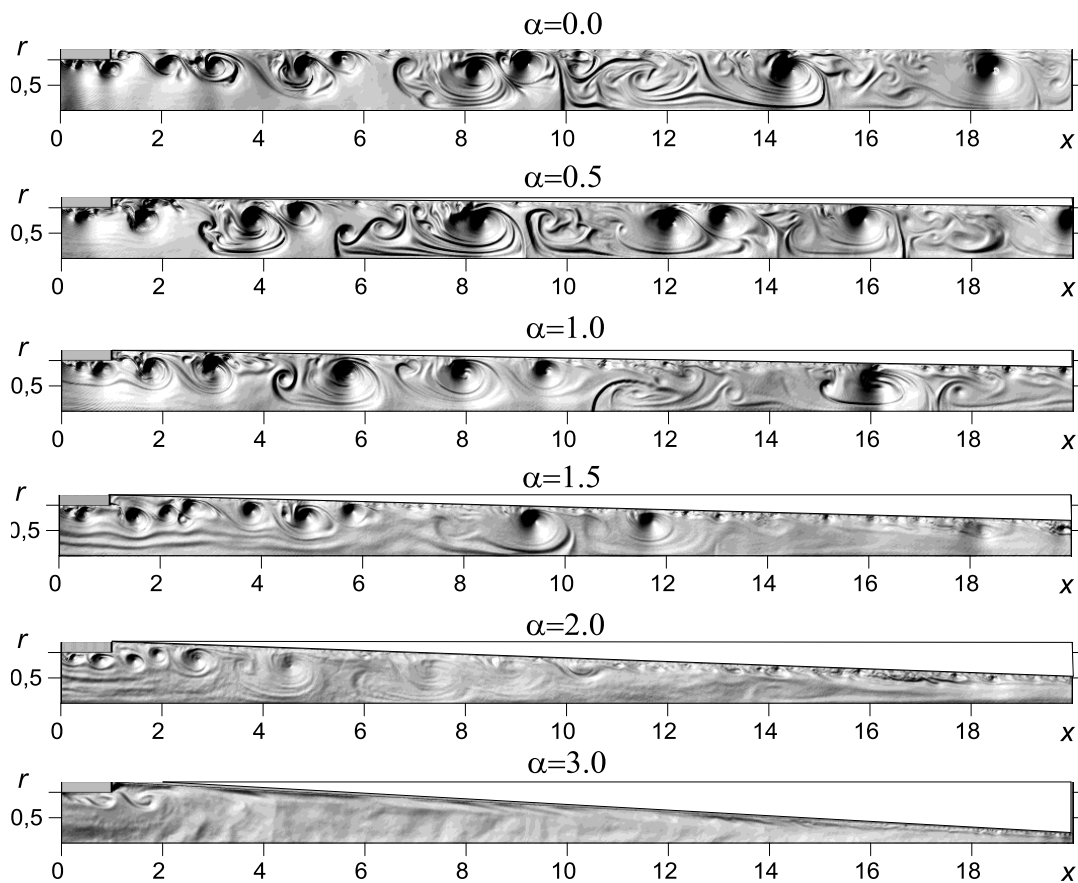
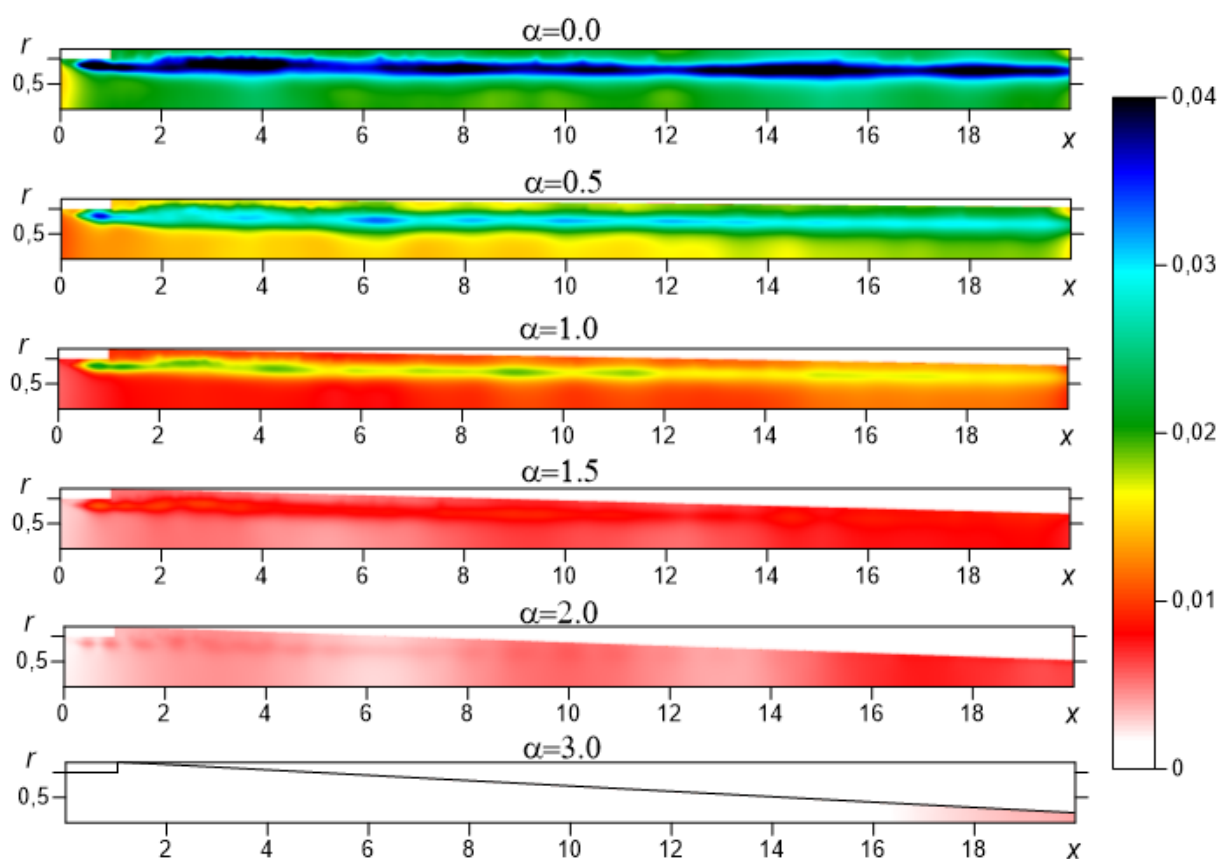


Рис. 5. Теневые картины плотности  $\rho$  мгновенных полей течения в соплах с различными углами сужения



**Рис. 6. Распределение флуктуаций давления  $\sigma_p$  в соплах с различными углами сужения**

## ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Проведены расчеты течения газа сквозь сужающиеся сопла, расположенные между двумя емкостями с газом. Для сопел с различным углом сужения представлены распределения гидромеханических параметров течения.

Показано, что в сопле с большим углом сужения газ сильнее разгоняется от начальных скоростей. Однако скорости в окрестности входа оказываются настолько малыми, что вихревые возмущения тут же диссипируют, ударяясь, кроме того, о стенку сопла.

В работе приведены относительные среднеквадратичные отклонения давления. Показано, что угол сужения сильно влияет на распространение вихревых возмущений, которые перестают проникать вглубь сопла.

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Липанов А. М., Карсканов С. А. Моделирование течения вязкого газа сквозь сужающиеся конические сопла // Химическая физика и мезоскопия. 2020. Т. 22, № 2. С. 175-183.
2. Липанов А. М. Теоретическая гидромеханика ньютоновских сред. М.: Наука, 2011. 551 с.
3. Jiang G. S., Shu C. W. Efficient Implementation of Weighted ENO Schemes // Journal of Computational Physics, 1996, vol. 126, no. 1, pp. 202-228.
4. Shu C. W. High Order ENO and WENO Schemes for Computational Fluid Dynamics // High-Order Methods for Computational Physics. Lecture Notes in Computational Science and Engineering, 1999, vol. 9, pp. 439-582.
5. Gottlieb S., Shu C. W. Total Variation Diminishing Runge-Kutta Schemes // Mathematics of Computation, 1998, vol. 67, pp. 73-85.

---

## Parametrical Study of Gas Flow Through Tapered Conic Nozzles

Karskanov S. A.

Udmurt Federal Research Center, Ural Branch of the Russian Academy of Science, Izhevsk, Russia

**SUMMARY.** A mathematical model of a viscous gas flow based on Direct Numerical Simulations is devised. The calculations are performed in an axisymmetric formulation. A computational algorithm based on high-order WENO-schemes for spatial derivatives and TDV Runge-Kutta scheme for time integration. The counting is carried out on a multiprocessor system using the procedure for parallelizing the computational process. The nozzle convergence angle is a variable parameter. The distribution of hydromechanical parameters in nozzles with different taper angles is shown. It was found that in nozzles with a high taper angle, the flow accelerates more strongly, but the disturbances given at the inlet are quickly extinguished. Distribution patterns of hydromechanical parameters are presented in the paper. It is shown, that speed increases when angle decreases, but initial velocity turns out to be small at a large taper angle.

**KEYWORDS:** direct numerical simulations, tapered conic nozzle, viscous flow, high-order approximation.

### REFERENCES

1. Lipanov A. M., Karskanov S. A. Modelirovanie techeniy vyazkogo gaza skvoz suzhuysheya konicheskie sopla [Simulation of Viscous Gas Flow Through Tapered Conic Nozzles]. *Khimicheskaya fizika i mezoskopiya* [Chemical Physics and Mesoscopy], 2020, vol. 22, no. 2, pp. 175-183. <https://doi.org/10.15350/17270529.2020.2.17>
2. Lipanov A. M. *Teoreticheskaya gidromekhanika n'yutonovskikh sred* [Theoretical hydromechanics of Newtonian fluids]. Moscow: Nauka Publ., 2011. 551 p.
3. Jiang G. S., Shu C. W. Efficient Implementation of Weighted ENO Schemes. *Journal of Computational Physics*, 1996, vol. 126, no. 1, pp. 202-228. <https://doi.org/10.1006/jcph.1996.0130>
4. Shu C. W. High Order ENO and WENO Schemes for Computational Fluid Dynamics. *High-Order Methods for Computational Physics. Lecture Notes in Computational Science and Engineering*, 1999, vol. 9, pp. 439-582. [https://doi.org/10.1007/978-3-662-03882-6\\_5](https://doi.org/10.1007/978-3-662-03882-6_5)
5. Gottlieb S., Shu C.W. Total Variation Diminishing Runge-Kutta Schemes. *Mathematics of Computation*, 1998, vol. 67, pp. 73-85. <https://doi.org/10.1090/S0025-5718-98-00913-2>

---

Карсканов Сергей Андреевич, кандидат физико-математических наук, старший научный сотрудник УдмФИЦ УрО РАН, e-mail: [ser@udman.ru](mailto:ser@udman.ru)